Matrices

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition

On suppose n et p supérieurs ou égaux à 1.
 On appelle matrice n, p toute application $\left\{ \begin{matrix} \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) \rightarrow a_{i,j} \end{matrix} \right\}$. On a coutume de désigner cette application par un tableau à deux entrées du type $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$. On pourra aussi noter ce tableau $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ désigne le nombre situé sur la i -ième ligne et la j -ième colonne du tableau.

Remarques

- On appelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices n, p à coefficients dans $\mathbb{K}$
- Si $n = p$ on parle alors de matrice carrée. On note alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carré.
- Si $n = 1$ on parle alors de matrice ligne
- Si $p = 1$ on parle alors de matrice colonne
- Dans une matrice n, p $L_i = (a_{i,1} \dots a_{i,p})$ désigne la i -ième ligne de la matrice
- Dans une matrice n, p $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ désigne la j -ième colonne de la matrice.

Définitions

On appelle matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice n, p nommée $E_{i,j}$ constituée de 0 sur ses n lignes et p colonnes sauf à l'intersection de sa i -ième ligne et j -ième colonne où réside un 1.

Définitions

Soient $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ et $B = \left((b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ deux matrices n, p et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $A + B = C$ avec $C = \left((c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$
- $\lambda A = D$ avec $D = \left((d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$
- $A = B$ ssi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} = b_{i,j}$

Exemple

$$E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

Il n'est pas difficile de constater que toute matrice peut se décomposer à l'aide des matrices élémentaires.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{1,2} - 3E_{1,3} + 4E_{2,2} + E_{2,3} + 5E_{3,3}$$

Définition

Soit A une matrice n, p . $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$
 On appelle transposée de A et on note tA la matrice p, n définie par ${}^tA = \left((b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \right)$ avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,j} = a_{j,i}$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ et $B = \left((b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ deux matrices n, p et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$

Preuve

Les preuves sont évidentes. Il suffit de partir du terme général de $A : a_{i,j}$ et du terme général de $B : b_{i,j}$ et déterminer le terme général de la matrice voulue.

Définition	Soit A une matrice. <ul style="list-style-type: none"> A est dite symétrique lorsque ${}^tA = A$ A est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$
Exemple	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique
Définition	L'ensemble des matrices carrés symétriques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ L'ensemble des matrices carrés antisymétriques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté : $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$
Propriété	Toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique
Preuve	
<p>Soit A une matrice carrée. Remarquons que tA possède les mêmes dimensions que A. Il est donc possible d'additionner A avec tA.</p> <p>Nous pouvons écrire $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.</p> <p>Posons $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$. ${}^tB = \frac{1}{2}({}^t(A + {}^tA)) = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = B$. Donc B est symétrique.</p> <p>Posons $C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. ${}^tC = \frac{1}{2}({}^t(A - {}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$. Donc C est antisymétrique.</p>	