Matrices

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carré à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de dimension n

Définition La matrice I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne comportant que des 0 sauf sa diagonale où elle ne comporte que des 1 est appelée la matrice identité.

Remarque Nous avons donc si $I = \left((I_{i,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ $I_{1,1} = I_{2,2} = \dots = I_{n,n} = 1$ et tous les autres coefficients de la matrice sont nuls.

Exemple
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A * I_n = I_n * A = A$

Preuve

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A = \left((a_{i,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. $I = \left((I_{i,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$
 $A * I_n = C$ avec $C = \left((c_{i,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $I_n * A = D$ avec $D = \left((d_{i,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$
 $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} I_{k,j} = a_{i,j}$; $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n I_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j}$; Donc $C = D = A$

Théorème $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau unitaire.

Preuve

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.
 La loi $+$ est une loi de composition interne, associative et commutative.
 Elle possède un élément neutre qui est la matrice nulle.
 Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède son inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est $-A$
- La loi $*$ pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une loi de composition interne. (Le produit de deux matrices carré de dimension n est une matrice carré de dimension n)
 Cette loi comme vu auparavant est associative et distributive par rapport à l'addition (Elle n'est par contre pas commutative).
 La loi $*$ possède un élément neutre qui est la matrice identité I_n . L'anneau est donc unitaire.

Définition Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous noterons A^k la quantité $A * A * \dots * A$ (k fois)
 Par convention $A^0 = I_n$

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$. $A^3 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 18 \\ 27 & -19 \end{pmatrix}$

Définition Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite nilpotente lorsque $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que A^k soit nulle.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; A est donc nilpotente.

Propriété Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent ($AB = BA$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ (binôme de Newton)	$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$
--	--

Preuve

La preuve de ces deux égalités a déjà été donnée dans un cadre plus général : celui d'un anneau dont deux éléments commutent (Voire le chapitre sur les anneaux) . Nous sommes bien dans ce cadre.

Méthode En combinant ce que nous venons de voir sur les matrices nilpotentes et le binome de Newton. Il devient possible de calculer les puissances n-ièmes de nombreuses matrices. Suivons l'exemple ci-bas

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nous allons essayer de calculer A^n avec $n \in \mathbb{N}^*$

Remarquons que $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarquons que $2I_3 * N = N * 2I_3 = 2N$ donc $2I_3$ et N commutent.
Nous pouvons donc appliquer le binôme de Newton.

$A^n = (2I_3 + N)^n = (N + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (N)^k (2I_3)^{n-k}$ (binôme de Newton)

Nous savons que N est nilpotente. (Exemple précédent). $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $n \geq 3$ $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc pour $n \geq 2$ nous avons :

$$A^n = \binom{n}{0} (2I_3)^{n-0} + \binom{n}{1} (N)^1 (2I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} (N)^2 (2I_3)^{n-2}$$

$$A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} * N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2$$

$$\left(\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! 2!} = \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} * N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 = 2^n I_3 + n 2^{n-1} * N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n 2^{n-1} & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & n 2^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(n-1) 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n 2^{n-1} + n(n-1) 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$