Matrices

Définition	• On appelle diagonale une matrice carré n'ayant que des coeffcients nuls en dessous et au dessus de sa diagonale. Cela peut se traduire ainsi : Soit n un entier naturel non nul. A diagonale ssi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ • On appelle Triangulaire supérieure une matrice carré n'ayant que des coeffcients nuls sous sa diagonale. Cela peut se traduire ainsi : Soit n un entier naturel non nul. A Triangulaire sup ssi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ • On appelle Triangulaire inférieure une matrice carré n'ayant que des coeffcients nuls au dessus de sa diagonale. Cela peut se traduire ainsi : Soit n un entier naturel non nul. A Triangulaire sup ssi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $a_{i,j} = 0$ si $i < j$
Exemple	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ diagonale — $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure — $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ triangulaire inférieure
Définitions	• L'ensemble des matrices carrées diagonales de dimension n à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $D_n(\mathbb{K})$ • L'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures de dimension n à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $T_n^+(\mathbb{K})$ • L'ensemble des matrices carrées triangulaires inférieures de dimension n à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $T_n^-(\mathbb{K})$
Théorème	$D_n(\mathbb{K}), T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ sont des anneaux unitaires.

Preuve

- Il est aisé de montrer que $(D_n(\mathbb{K}),+)$, $(T_n^+(\mathbb{K}),+)$ et $(T_n^-(\mathbb{K}),+)$ sont des sous groupes commutatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $+$ est une loi de composition interne pour ces trois ensembles. L'élément neutre, la matrice nulle, appartient à ces trois ensembles. Enfin, soit A une matrice quelconque d'un de ces trois ensembles, $-A$ appartient au même ensemble d'origine.
- La loi $*$ est associative et distributive pour l'addition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle l'est donc aussi dans ces trois ensembles qui sont inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice I_n appartient à ces trois ensembles. Donc si ces ensembles sont des anneaux, ils seront unitaires.
  La seule difficulté de cette démonstration réside donc dans le fait de montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne pour ces trois ensembles.
  - Soient A et B deux matrices de $D_n(\mathbb{K})$. $A = \left((a_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$, $B = \left((b_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$
    Supposons $C = AB$ avec $C = \left((c_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$
    $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} = a_{i,i}b_{i,j}$ (En effet si $k \neq i, a_{i,k} = 0$).
    Mais si $i \neq j, b_{i,j} = 0$ donc si $i \neq j$, $c_{i,j} = 0$, $C \in D_n(\mathbb{K})$
  - Soient A et B deux matrices de $T_n^+(\mathbb{K})$. $A = \left((a_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$, $B = \left((b_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$
    Supposons $C = AB$ avec $C = \left((c_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$
    $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} = \sum_{k=i}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$ (En effet pour $k < i, a_{i,k} = 0$).
    Supposons $i > j$ alors dans la somme précédente nous avons $k \geq i > j$
    Comme $k > j$ nous avons $b_{k,j} = 0$ et donc $c_{i,j} = 0$
    Nous avons donc montré que si $i > j$ alors $c_{i,j} = 0$. $C \in T_n^+(\mathbb{K})$
  - Soient A et B deux matrices de $T_n^-(\mathbb{K})$. $A = \left((a_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$, $B = \left((b_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$
    Supposons $C = AB$ avec $C = \left((c_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$
    $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} a_{i,k}\, b_{k,j}$ (En effet pour $k > i, a_{i,k} = 0$).
    Supposons $i < j$ alors dans la somme précédente nous avons $k \leq i < j$
    Comme $k < j$ nous avons $b_{k,j} = 0$ et donc $c_{i,j} = 0$
    Nous avons donc montré que si $i < j$ alors $c_{i,j} = 0$. $C \in T_n^-(\mathbb{K})$

Exemple	$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&5&6\\0&3&3\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&5&6\\0&5&3\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&35&39\\0&15&15\\0&0&8\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&0&0\\5&3&0\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&2&0\\3&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&6&0\\17&18&20\end{pmatrix}$
Remarque	Pour démontrer que $T_n^-(\mathbb{K})$ est stable pour la loi $*$, nous aurions pu nous servir du fait que $T_n^+(\mathbb{K})$ l'était. En effet : Soient A et B deux matrices de $T_n^-(\mathbb{K})$. ${}^tB$ et ${}^tA$ appartiennent donc à $T_n^+(\mathbb{K})$. Donc ${}^tB * {}^tA$ appartient à $T_n^+(\mathbb{K})$. Mais ${}^t(AB)= {}^tB * {}^tA$. Donc ${}^t(AB) \in T_n^+(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in T_n^-(\mathbb{K})$. Nous avons donc montré que $T_n^-(\mathbb{K})$ était stable pour la loi $*$ grâce à la statbilité de $T_n^+(\mathbb{K})$