Matrices

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition	Soit A une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite inversible lorsqu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$ La matrice B est appelée la matrice inverse de la matrice A. On note $\boldsymbol{B = A^{-1}}$
Remarque	Toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas inversibles. Certaines le sont, d'autres non La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ a pour inverse la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \\ \frac{7}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$ (je vous propose de le vérifier à la main ou à l'aide d'une calculatrice) La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne possède pas d'inverse.
Propriété	L'inverse d'une matrice A si elle existe est unique

Preuve

Supposons qu'une matrice A possède deux inverses B et C
Nous avons $B = B * I_n = B * (A * C) = (B * A) * C = I_n * C = C$

Théoréme	L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif noté $GL_n(\mathbb{K})$

Preuve

1. Remarquons d'abord que la loi $*$ est une loi de composition interne pour $GL_n(\mathbb{K})$
   Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{K}\mathbb{N})$.
   $$(B^{-1} * A^{-1}) * (A * B) = B^{-1} * (A^{-1} * A) * B = B^{-1} * I_n * B = B^{-1} * B = I_n$$
   Donc AB est inversible et son inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$
2. $*$ est une loi associative et $\forall A \in\ GL_n(\mathbb{K}), A$ admet une matrice inverse qui est A^{-1}

Propriété	Soient A et B deux matrices inversibles. Nous avons : 1. $(A^{-1})^{-1} = A$ 2. $(AB)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ 3. Soit $k \in \mathbb{N}$ $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ 4. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Preuve

1. $(A^{-1}) * A = A * A^{-1} = I_n$ donc $(A^{-1})^{-1} = A$
2. Démontré dans la preuve que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif
3. $A^k * (A^{-1})^k = A * \dots A * A^{-1} * \dots A^{-1} = I_n$ donc $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
4. $({}^tA) * {}^t(A^{-1}) = {}^t[(A^{-1}) * A] = {}^tI_n = I_n$
   ${}^t(A^{-1}) * ({}^tA) = {}^t[A * (A^{-1})] = {}^tI_n = I_n$

Propriété	Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. • Si une des colonnes de A est combinaison linéaire de ses autres colonnes, alors A n'est pas inversible. • Si une des lignes de A est combinaison linéaire de ses autres lignes, alors A n'est pas inversible.

Preuve

Soient $L_1, L_2 \dots L_n$ les lignes de A. L'une d'entre elles, appelons là L_i est combinaison linéaire des autres.
Donc $\exists(\alpha_1, \alpha_2 \dots\ \alpha_n)$ (α_i étant évité) tel que $L_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \alpha_k C_k$

$$(-\alpha_1, -\alpha_2 - \alpha_3, \dots -\alpha_{i-1}, 1, -\alpha_{i+1}, \dots -\alpha_n)A = 0_{1,n}$$

Si A était inversible nous pourrions composer à droite par A^{-1} il nous resterait
$(-\alpha_1, -\alpha_2 - \alpha_3, \dots -\alpha_{i-1}, 1, -\alpha_{i+1}, \dots -\alpha_n) = 0_{1,n}$ ce qui impliquerait $1 = 0$ (contradiction)

Dans le cas où A possède une colonne combinaison liméaire des autres, considérons ${}^tA$.
${}^tA$ possède une ligne combinaison liméaire des autres, elle n'est donc pas inversible. A ne peut donc pas être inversible.

Définition	Considérons le cas particulier $n = 2$ On appelle déterminant d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le réel $ad - bc$ que l'on note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
Propriété	Toujours dans le cas $n = 2$ Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ Dans ce cas $A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Preuve

- Si A est inversible alors $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. En effet si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ était nul, cela signifierait que les deux vecteurs colonnes auraient des valeurs proportionnelles ce qui entrainerait que l'un soit combinaison linéaire des autres et donc que A ne soit pas inversible.
- Supposons $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} I_2$
  Donc en posons $B = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ il vient $AB = BA = I_2 \Rightarrow A^{-1} = B$