

Systèmes linéaires

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition

On appelle système linéaire tout système de la forme
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les inconnues.

Tous les $a_{i,j}$ sont des coefficients à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple

Les systèmes linéaires que vous avez déjà étudiés jusqu'à présent sont les systèmes 2×2 et 3×3 du

type : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y - z = 1 \\ -x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$.

Notons que ces deux systèmes peuvent s'interpréter géométriquement.

- L'équation d'une droite dans le plan s'écrivant $ax + by + c = 0$ le premier système peut être lu ainsi : Quel est le point d'intersection entre les droites du plan d'équation $x - 2y - 3 = 0$ et $2x - 5y - 1 = 0$? Nous savons par des arguments géométriques que cette intersection sera un point (si les droites sont sécantes) ou une droite (si les droites sont confondues) ou l'ensemble vide (si les droites sont strictement parallèles)
- De même L'équation d'un plan dans l'espace s'écrivant $ax + by + cz + d = 0$ le deuxième système peut être lu ainsi : Quel est le point d'intersection entre les plans de l'espace d'équation $x - 2y + z - 3 = 0$, $2x - 5y - z - 1 = 0$ et $-x + 5y - 2z - 3 = 0$? Nous savons par des arguments géométriques que cette intersection sera une droite (si les plans sont sécants selon une même droite) ou un plan (si les trois plans sont confondus) ou un point ou l'ensemble vide.

Remarque

Mais alors que vient faire cette page sur les systèmes linéaires dans un chapitre consacré aux matrices ? Tout système linéaire peut se traduire de manière matricielle. Les deux exemples précédents peuvent ainsi être traduits :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Définition

Nous appellerons système linéaire homogène tout système linéaire où le second membre est nul.

Exemple

Les systèmes linéaires $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les systèmes linéaires associées aux deux systèmes linéaires des exemples précédents.

Théorème

Appelons SG la solution générale d'un système linéaire.

Appelons SGH la solution générale du système linéaire homogène associé au précédent système.

Appelons SP une solution particulière du système linéaire (avec second membre).

$$\text{Alors : } SG = SP + SGH$$

Preuve

Soit $AX = B$ un système linéaire quelconque.

Cherchons la solution générale d'un tel système. Soit X_0 une solution particulière d'un tel système et soit X une solution quelconque d'un tel système. Nous avons $AX = B$ et $AX_0 = B$. Donc en soustrayant ces deux égalités il vient : $AX - AX_0 = 0 \Rightarrow A(X - X_0) = 0 \Rightarrow X - X_0$ est une solution du système homogène associé. Appelons S cette solution, nous avons $X - X_0 = S \Rightarrow X = S + X_0$. Nous avons donc $SG \subset SP + SGH$

Réciproquement : Soit $X = S + X_0$ avec S solution du système homogène et X_0 solution du système (avec second membre).

$$AX = A(S + X_0) = AS + AX_0 = B + 0 = B$$

Donc X est solution du système avec second membre donc $SP + SGH \subset SG$

Nous avons bien $SP + SGH = SG$

Remarque

Concrètement les solutions d'un système linéaire pourront être infinies. Nous avons donc besoin d'un outil pour représenter de tels ensembles. Cet outil est le mot clé **Vect**

Définition

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$ est noté $Vect(V_1, V_2, \dots, V_n)$

Nous avons $Vect(V_1, V_2, \dots, V_n) = \{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n \text{ avec } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\}$

Exemples	• Soient $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Ces deux vecteurs, non colinéaires, forment une base du plan. Nous avons donc $\{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2\} = \mathbb{R}^2$ • Soient $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Ces deux vecteurs sont liés ($V_2 = 2V_1$). Nous avons donc $Vect(V_1, V_2) = Vect(V_1, 2V_1) = \{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 * 2V_1\} = \{(\alpha_1 + 2\alpha_2)V_1\} = Vect(V_1)$ $Vect(V_1, V_2)$ est donc une droite vectorielle portée par V_1 • Soient $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace. Les deux premiers vecteurs sont libres par contre le troisième est lié aux deux premiers ($V_3 = 2V_1 + 3V_2$). Nous avons donc $Vect(V_1, V_2, V_3) = Vect(V_1, V_2, 2V_1 + 3V_2) = \{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3(2V_1 + 3V_2)\} = \{(\alpha_1 + 2\alpha_3)V_1 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)V_2\} = Vect(V_1, V_2)$ $Vect(V_1, V_2, V_3)$ est donc un plan vectoriel portée par V_1, V_2
Méthode du Pivot de	Maintenant que nous avons ce nouvel outil nous allons pouvoir résoudre des systèmes linéaires. Nous allons pour cela utiliser une méthode appelée celle du pivot de Gauss. Considérons le système linéaire homogène suivant : $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - t = 0 \\ x - y + 3z - t = 2 \\ x - y + z - 4t = 0 \end{cases} (*)$ Ce système peut s'écrire matriciellement ainsi : $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit du type $AX = B$ Nous allons à l'aide de transformations sur les lignes transformer ce système pour que l'équation matricielle puisse s'écrire $TX = B'$ avec T matrice ne possédant que des 0 sous sa diagonale. Considérons (*) et appliquons lui les opérations élémentaires suivantes : $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ (Nous remplaçons la deuxième ligne par 2 * la deuxième ligne - la première ligne) $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ (Nous remplaçons la troisième ligne par 2 * la troisième ligne - la première ligne) Nous obtenons donc le système équivalent suivant : $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - t = 0 \\ 2y + 2z - t = 4 \\ 2y - 2z - 7t = 0 \end{cases} (**)$ qui peut se traduire par $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Remarquons que dans cette nouvelle matrice il n'y a que des zéros sous le premier coefficient de la première ligne. Nous sommes sur le chemin d'une matrice n'ayant que des 0 sous la diagonale. Reitérons le procédé une ligne plus bas : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ Nous obtenons donc le système équivalent suivant : $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - t = 0 \\ 2y + 2z - t = 4 \\ -4z - 6t = -4 \end{cases} (***)$ qui peut se traduire par $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ Nous sommes bien arrivés à une n'ayant que des 0 sous sa diagonale. Nous avons donc : 1. $-4z - 6t = -4 \Rightarrow -4z = -4 + 6t \Rightarrow z = 1 - \frac{3}{2}t$ 2. Remplaçons dans la deuxième ligne l'expression de z que nous venons de trouver : $2y + 2z - t = 4 \Rightarrow 2y + 2\left(1 - \frac{3}{2}t\right) - t = 4 \Rightarrow 2y + 2 - 3t - t = 4 \Rightarrow 2y = 4t + 2 \Rightarrow y = 2t + 1$ 3. Remplaçons dans la première ligne l'expression de y et l'expression de z que nous venons de trouver : $2x - 4y + 4z - t = 0 \Rightarrow 2x - 4(2t + 1) + 4\left(1 - \frac{3}{2}t\right) - t = 0 \Rightarrow 2x - 8t - 4 + 4 - 6t - t = 0 \Rightarrow 2x = 15t \Rightarrow x = \frac{15}{2}t$

Nous avons donc
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}t \\ 2t+1 \\ 1-\frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (***)$$

Nous retrouvons une structure connue : $SG = SP + SGH$

En effet : $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien une solution particulière du système avec second membre.

De même $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien une solution du système homogène associé.

Soit S l'ensemble des solutions du système linéaire

Soient $V_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous pouvons donc écrire d'après (***)

$$S = V_1 + Vect(V_2)$$