Matrices

- Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres i, j, n, p, q, r, s, l désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Nous travaillerons dans ce chapitre sur des matrices de $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K})$.
- Nous noterons :
  - I_n la matrice identité
  - $E_{i,j}$ la matrice ne comportant que des 0 sauf sur la $i-ième$ ligne et la $j-ième$ colonne
  - $D_i(\lambda)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne comportant que des 1 sur la diagonale sauf l'élément sur la $i-$ $ième$ ligne et la i$-ième$ colonne qui vaut λ.
  - Pour $j \neq i$ $\ P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
  - Pour $j \neq i$ $\ T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$
  - L_i la la $i-ième$ ligne d'une matrice et C_j la la $j-ième$ colonne d'une matrice.

Définition

Nous appelerons opération élémentaire sur des matrices toute opération consistant à :
- Remplacer une ligne (colonne) par la même ligne (colonne) multipliée par un scalaire
- Inverser deux lignes (colonnes)
- Remplacer une ligne (colonne) par une combinaison linéaire de lignes (colonnes)

Propriété

Soit λ un scalaire. Soit $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$ une matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K})$. Remplacer dans cette matrice L_k par λL_k ($L_k \leftarrow \lambda L_k$) revient à multiplier A à gauche par la matrice $D_k(\lambda)$. En multipliant à droite on remplace C_k par λC_k ($C_k \leftarrow \lambda C_k$)

Preuve

Nous nous contenterons dans les démonstrations suivantes de donner les preuves sur les opérations sur les lignes et laisserons au lecteur le soin d'adapter ces preuves aux opérations sur les colonnes. Soit $D_k(\lambda) = \left(\left(d_{i,j}\right)\right)$ et $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$

$D_k(\lambda)\, A = C$ avec $C = \left(\left(c_{i,j}\right)\right)$;

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} d_{i,l}\, a_{l,j}$$

Si $l \neq k$ $\ d_{i,l} = 0$ pour $l \neq i$ et $d_{l,l} = 1$sinon
Si $l = k$ $\ d_{i,l} = 0$ pour $l \neq i$ et $d_{l,l} = \lambda$ sinon

$$c_{i,j} = d_{i,i} a_{i,j}$$

Si $i \neq k$ $\ c_{i,j} = a_{i,j}$
Si $i = k$ $\ c_{k,j} = \lambda a_{k,j}$. Nous avons bien réussi à multiplier la ligne k et seulement la ligne k par λ

Propriété

Soit $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$ une matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K})$. Inverser dans cette matrice les lignes L_r et L_s ($L_r \leftrightarrow L_s$) revient à multiplier A à gauche par la matrice $P_{r,s}$. En multipliant à droite on inverse C_r et C_s ($C_r \leftrightarrow C_s$)

Preuve

$$P_{r,s}\, A = D \text{ avec avec } D = \left(\left(d_{i,j}\right)\right) \text{ et } P = \left(\left(p_{i,j}\right)\right)$$

$$d_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} p_{i,l}\, a_{l,j}$$

Si $i \neq r$ et Si $i \neq s$ $\ d_{i,j} = p_{i,i} a_{i,j} = a_{i,j}$
Si $i = r$ $d_{r,j} = p_{r,s} a_{s,j} = a_{s,j}$
Si $i = s$ $d_{s,j} = p_{s,r} a_{r,j} = a_{r,j}$
Nous avons donc bien échangé les lignes L_r et L_s

Propriété

Soit λ un scalaire. Soit $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$ une matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K})$. Remplacer dans cette matrice la ligne L_r par $L_r + \lambda L_s$ ($L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$) revient à multiplier A à gauche par la matrice $T_{r,s}(\lambda)$. En multipliant à droite on remplace C_s par $\lambda C_r + C_s$ ($C_s \leftarrow C_s + \lambda C_r$)

Propriété Preuve

$$T_{r,s}(\lambda)\, A = D \text{ avec avec } D = \left(\left(d_{i,j}\right)\right) \text{ et } T_{r,s}(\lambda) = \left(\left(t_{i,j}\right)\right)$$

$$d_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l}\, a_{l,j}$$

Si $i \neq r$ $\ d_{i,j} = t_{i,i} a_{i,j} = a_{i,j}$
Si $i = r$ $d_{r,j} = t_{r,r} a_{r,j} + t_{r,s} a_{s,j} = a_{r,j} + \lambda a_{s,j}$
Nous avons donc bien remplacé la ligne L_r par $L_r + \lambda L_s$

Définition	Soient i et j deux entiers. On appelle symbôle de Kronecker et on note $\delta_{i,j}$ le nombre égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon.
Propriété	Soient i, j, k, l quatres entiers compris entre 1 et n $$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

Preuve

Posons $E_{i,j} = \left(\left(e_{m,n}\right)\right)$. Posons $E_{i,j}E_{k,l} = C$ avec $C = \left(\left(c_{r,s}\right)\right)$;

$$c_{r,s} = \sum_{p=1}^{n} e_{r,p}\, e_{p,s}$$

Si $r \neq i$ alors $e_{r,p} = 0 \Rightarrow c_{r,s} = 0$
Si $s \neq l$ alors $e_{p,s} = 0 \Rightarrow c_{r,s} = 0$
Si $r = i$ et $s = l$ alors

$$c_{i,l} = \sum_{p=1}^{n} e_{i,p}\, e_{p,l} = e_{i,j}e_{j,l} = e_{j,l}$$

Si $k \neq j$ $c_{r,s} = c_{i,l} = 0$
Si $k = j$ $c_{r,s} = c_{i,l} = 1$
Nous avons bien

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

Propriété	Les matrices $D_i(\lambda)$ (pour $\lambda \neq 0$), $P_{i,j}$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles.

Preuve

- Remarquons que pour $\lambda \neq 0, D_i(\lambda)\, D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) D_i(\lambda) = I_n$
- Remarquons que pour $i \neq j$ $P_{i,j}P_{i,j} = I_n$
  Posons $P_{i,j} = \left(\left(p_{m,n}\right)\right)$
  $$p_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} p_{r,k}\, p_{k,s}$$
  Si $r \neq i$ et $r \neq j$ $p_{r,s} = p_{r,r}p_{r,s} = p_{r,s} = \begin{Bmatrix} 1\ si\ r = s \\ 0\ sinon \end{Bmatrix}$. Il n'y a que des 1 sur la diagonale.
  Si $r = i,\ p_{r,s} = p_{i,j}p_{j,s} = p_{j,s} = \begin{Bmatrix} 1\ si\ s = i \\ 0\ sinon \end{Bmatrix}$. Donc $p_{i,i} = 1$ et les autres éléments sur la ligne i sont nuls.
  Si $r = j,\ p_{r,s} = p_{j,i}p_{i,s} = p_{i,s} = \begin{Bmatrix} 1\ si\ s = j \\ 0\ sinon \end{Bmatrix}$. Donc $p_{j,j} = 1$ et les autres éléments sur la ligne j sont nuls.
  En résumé $P_{i,j}P_{i,j} = I_n$

- Remarquons que pour $i \neq j$ $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(-\lambda) = \left(I_n + \lambda E_{i,j}\right)\left(I_n - \lambda E_{i,j}\right) = I_n - \lambda E_{i,j} + \lambda E_{i,j} = I_n$
  De même $T_{i,j}(-\lambda)\ j\ T_{i,j}(\lambda) = 0$ pour les mêmes raisons.

Remarque	En résumé nous pouvons dire : • qu'effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice revient à la multiplier à gauche par une matrice inversible. • qu'effectuer une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice revient à la multiplier à droite par une matrice inversible.