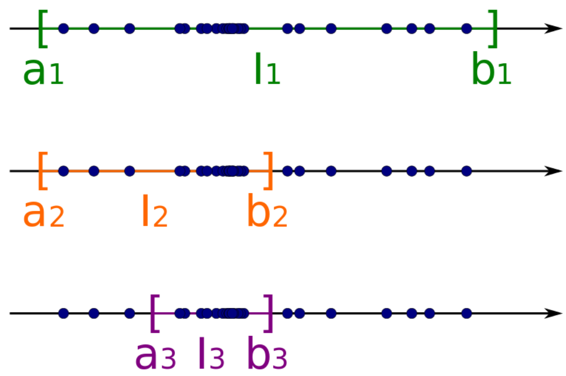
Théorème Bolzano Weierstrasse	
Théorème	De toute suite réelle bornée il est possible d'extraire une suite convergente. Autrement dit toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

Preuve

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Nous allons construire deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'une fonction d'extraction φ vérifiant les hypothèses suivantes :

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \le U_{\varphi(n)} \le b_n$



$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Toutes ses valeurs sont donc comprises entre un minorant m et un majorant M.
Nous poserons $a_0 = m$ et $b_0 = M$
Nous construirons les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec les relations de récurrence suivantes :
Deux cas se présentent :
Si $\left\{ U_n \ tels\ que\ a_n \le U_n \le \frac{a_n+b_n}{2} \right\}$ est infini alors nous noterons $\left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{a_{n+1} = a_n} \\ \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}} \end{matrix} \right\}$ **(cas i)**
Sinon cela signifie que le deuxième segment $\left[\frac{a_n+b_n}{2};\ b_n\right]$ contiendra une infinité de termes. Nous noterons donc $\left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}} \\ \boldsymbol{b_{n+1} = b_n} \end{matrix} \right\}$ **(cas ii)**

Notons que l'un au moins des deux segments : $\left[a_n\,;\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_n+b_n}{2};\ b_n\right]$ contiendra une infinité de termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet si ce n'était pas le cas la réunion des deux segments contiendrait un nombre fini de termes ce qui est contradictoire avec le fait que tous les termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans le segment $[a_n\,; b_n\,]$.

Nous avons donc à ce stade construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par récurrence nous pouvons montrer aisément que $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, a_n \le b_n}$
Initialisation : $a_0 \le b_0$
Hérédité : si $a_n \le b_n$ alors :
Dans le cas i nous avons $\left\{ \begin{matrix} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{matrix} \right\}$ ce qui nous donne $b_{n+1} \ge a_{n+1}$
Dans le cas ii nous avons $\left\{ \begin{matrix} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{matrix} \right\}$ ce qui nous donne aussi $b_{n+1} \ge a_{n+1}$
Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \le b_n$

Grâce à cette propriété nous avons :

$$\left\{ \begin{matrix} \text{cas } i \ : \ b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \text{ d'où } b_{n+1} - b_n \le 0 \\ \text{cas } ii \ : \ b_{n+1} - b_n = 0 \text{ d'où } b_{n+1} - b_n \le 0 \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \boldsymbol{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} \textbf{ décroissante}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{cas } i \ : \ a_{n+1} - a_n = 0 \text{ d'où } a_{n+1} - a_n \ge 0 \\ \text{cas } ii \ : \ a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \text{ d'où } a_{n+1} - a_n \ge 0 \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \boldsymbol{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} \textbf{ décroissante}$$

Que vaut la différence des deux suites ?

$\left\{ \begin{matrix} \text{cas } i \ : \ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \\ \text{cas } ii \ : \ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \end{matrix} \right\}$ Nous en déduisons que la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Nous avons donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0}$

Nous avons donc à ce stade montré les **trois premiers points** cités en début de preuve. Il nous reste à trouver la fonction d'extraction φ. La encore cette fonction d'extraction se définit par récurrence.
Le segment $[a_0\,; b_0\,]$ contient une infinité de termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous noterons $\varphi(0)$ l'indice du plus petit terme compris entre a_0 et b_0. Nous avons donc $a_0 \leq U_{\varphi(0)} \leq b_0$
Au rang $n+1$, le segment $[a_{n+1}\,; b_{n+1}\,]$ contient une infinité de termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Parmi ceux-ci ceux dont le rang est inférieur à $\varphi(n)$ sont en nombre fini. Donc $\{i\ tel\ que\ i\ > \varphi(n)\ et\ a_{n+1} \leq U_i \leq b_{n+1}\}$ est infini. Prenons le plus petit indice de cet ensemble, ce sera $\varphi(n+1)$, ce qui garantit :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n)$$

φ est donc une fonction d'extraction puisque strictement croissante sur $\mathbb{N}$ et vérifie $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a_n} \leq \boldsymbol{U_{\varphi(n)}} \leq \boldsymbol{b_n}$**.**

A ce stade les **4 premiers points** sont montrés. Nous avons donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont des suites adjacentes ce qui garantit leur limite commune vers un réel l. De la dernière égalité $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq U_{\varphi(n)} \leq b_n$ nous déduisons grâce au théorème des gendarmes que la suite $\left(U_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite l.

Théorème (Généralisation)	De toute suite complexe bornée il est possible d'extraire une suite convergente

Preuve

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.
$\forall n \in \mathbb{N}, |Re\ (U_n)| \leq \sqrt{|Re\ (U_n)|^2 + |Im\ (U_n)|^2} \leq |U_n|$ et $|Im\ (U_n)| \leq \sqrt{|Re\ (U_n)|^2 + |Im\ (U_n)|^2} \leq |U_n|$
Donc les suites $Re\ (U_n)$ et $Im\ (U_n)$ sont des suites réelles bornées.
Il existe deux fonctions d'extraction φ et ψ telles que $\left(Re\ (U_{\varphi(n)})\ \right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(Im\ (U_{\psi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$convergentes.
$\left(Im\ (U_{\varphi o \psi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite d'une suite convergente. C'est donc une suite convergente.

$\left(Re\ (U_{\varphi(n)})\ \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Cela signfie que :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ tq\ \forall n \geq N\ \left|Re\ (U_{\varphi(n)}) - \mathrm{l}\right| \leq\ \varepsilon$$

Pour $n \geq N$ nous savons que $\psi(\mathrm{n}) \geq n \geq N$ (Propriété déjà vue d'une fonction d'extraction)

Il vient $\forall n \geq N\ \left|Re\ (U_{\varphi o \psi(n)}) - \mathrm{l}\right| \leq\ \varepsilon$ ce qui implique la convergence de la suite $\left(Re\ (U_{\varphi o \psi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\left(Im\ (U_{\varphi o \psi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(Re\ (U_{\varphi o \psi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant deux suites réelles convergentes, nous en déduisons la convergence de la suite complexe $(U_{\varphi o \psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$