Polynômes

Ce théorème n'est pas au programme de MPSI. Il est néanoins fondamental pour la décomposition des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$. Une lecture de sa preuve ne peut pas nuire. Celle-ci commence par un lemme.

Lemme	Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$ alors $\exists b \in \mathbb{C}$ tel que $\lvert P(b)\rvert < \lvert P(a)\rvert$

Preuve

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$

Posons $Q(X) = \frac{P(X+a)}{P(a)}$. Nous avons $Q(0) = 1$. $\exists b \in \mathbb{C}$ tel que $|P(b)| < |P(a)| \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{|P(b)|}{|P(a)|} < 1$

$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(b-a)| < 1 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(c)| < 1$ $(*)$

Posons $Q(X) = 1 + q_1X + q_2X^2 + \cdots\ q_nX^n$

Rien n'empêche $q_1, q_2 \ldots$ d'être nul. Soit q_p le premier coefficient non nul.

$$Q(X) = 1 + q_pX^p + q_{p+1}X^{p+1} + \cdots\ q_nX^n$$

Posons $X = \beta r$ avec $r \in \mathbb{R}$ et β racine $p-ième$ de $-\frac{1}{q_p}$. $\left(\beta^p = -\frac{1}{q_p}\right)$

$$Q(\beta r) = 1 + q_p(\beta r)^p + q_{p+1}(\beta r)^{p+1} + \cdots\ q_n(\beta r)^n$$
$$Q(\beta r) = 1 - r^p + q_{p+1}\beta^{p+1}r^{p+1} + \cdots\ q_n\beta^n r^n$$
$$Q(\beta r) = 1 - r^p + r^{p+1}\left[\ q_{p+1}\beta^{p+1} + \cdots\ q_n\beta^n r^{n-p-1}\right]$$

En choisissant r dans le segment $[0;1]$, il vient

$$\left|q_{p+1}\beta^{p+1} + \cdots\ q_n\beta^n r^{n-p-1}\right| \leq \left|q_{p+1}\beta^{p+1}\right| + \cdots \left|q_n\beta^n\right| \leq M$$

Nous avons donc $|Q(\beta r)| \leq |1 - r^p| + |r^{p+1}|M$

Si $0 < \frac{1}{(2M)} < 1$, Choisissons r tel que $r = \frac{1}{(2M)}$.

Il vient $|Q(\beta r)| \leq |1 - r^p| + r|r^p|M \leq |1 - r^p| + \frac{r^p}{2} \leq 1 - r^p + \frac{r^p}{2} \leq 1 - \frac{r^p}{2} < 1$

Si $\frac{1}{(2M)} \geq 1 \Leftrightarrow 2M \leq 1 \Leftrightarrow M \leq \frac{1}{2}$.

Nous avons : $|Q(\beta r)| \leq |1 - r^p| + \frac{|r^{p+1}|}{2} \leq 1 - r^p + \frac{r^p}{2} \leq 1 - \frac{r^p}{2} < 1$ Pour tout $r \in [0;1]$

Dans les deux cas nous avons trouvé $c \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(c)| < 1$. D'après $(*)$ nous avons démontré le lemme.

Théorème	C'est le théorème d'Alembert. Tout poiynôme de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Preuve

Soit P un polynôme complexe de $\mathbb{C}[X]$. $A = \{|P(z)|_{z\in\mathbb{C}}\}$ est une sous partie de $\mathbb{R}$. A est non vide puisque contient $|P(0)|$.
D'après la propriété de la borne inf, A admet une borne inf que nous nommerons m.

$$\exists (\boldsymbol{z_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} \textbf{ suite de } \mathbb{C} \textbf{ telle que } \lim_{n\to+\infty} |\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z_n})| = \boldsymbol{m}$$

Posons $P = a_0 + a_1z + \cdots a_nz^n$ avec a_n terme dominant non nul.

Nous avons $|P(z)| = |a_0 + a_1z + \cdots a_nz^n| = |z^n|\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots \frac{a_0}{z^n}\right| = |z|^n\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots \frac{a_0}{z^n}\right|$

Posons $z = re^{i\theta} \Rightarrow \left|P\left(re^{i\theta}\right)\right| = r^n\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{re^{i\theta}} + \frac{a_{n-2}}{r^2e^{2i\theta}} + \cdots \frac{a_0}{r^ne^{ni\theta}}\right|$

$$\left|\frac{a_{n-1}}{re^{i\theta}} + \frac{a_{n-2}}{r^2e^{2i\theta}} + \cdots \frac{a_0}{r^ne^{ni\theta}}\right| \leq \frac{1}{r}\left|\frac{a_{n-1}}{e^{i\theta}}\right| + \frac{1}{r^2}\left|\frac{a_{n-2}}{e^{2i\theta}}\right| + \cdots \frac{1}{r^n}\left|\frac{a_0}{e^{ni\theta}}\right|$$

Donc $\lim\limits_{r\to+\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{re^{i\theta}} + \frac{a_{n-2}}{r^2e^{2i\theta}} + \cdots \frac{a_0}{r^ne^{ni\theta}}\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{re^{i\theta}} + \frac{a_{n-2}}{r^2e^{2i\theta}} + \cdots \frac{a_0}{r^ne^{ni\theta}} = 0$

Il vient $\lim\limits_{r\to+\infty}\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{re^{i\theta}} + \frac{a_{n-2}}{r^2e^{2i\theta}} + \cdots \frac{a_0}{r^ne^{ni\theta}}\right| = |a_n|$.

Nous avons donc $\lim\limits_{r\to+\infty}\left|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{re^{i\theta}})\right| = +\infty$ **et en particulier** $\exists \boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{tq}\ \forall|\boldsymbol{z}| > \boldsymbol{\alpha}\quad |\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})| > \boldsymbol{m} + \boldsymbol{1}$

Or nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty}|P(z_n)| = m$. Cela signifie $\exists N_0\ tq\ \ \forall n \geq N_0\ m + \frac{1}{2} \geq |P(z_n)| \geq m - \frac{1}{2}$

Par conséquent nous avons pour $n \geq N_0$ $|\boldsymbol{z_n}| \leq \boldsymbol{\alpha}$

La suite $(\boldsymbol{z_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ **est donc bornée.**

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass Il existe une suite extraite de $(\boldsymbol{z_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ convergente vers l.

Nous posons φ fonction d'extraction telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{z_{\varphi(n)}} = \boldsymbol{l}$

$$|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{l})| = \left|\boldsymbol{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{z_{\varphi(n)}}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{z_{\varphi(n)}}\right)\right| = \boldsymbol{m} \text{ (tout polynôme et la fonction module sont continues)}$$

La borne inf de A est donc atteinte pou $z = l$. Cette borne inf est forcément nulle. En effet si elle était non nulle, nous aurions $P(l) > 0$ et d'après le **lemme** il existerait un l' tel que $P(l') < P(l)$ ce qui contredirait la définition de la borne inf. En résumé nous avons bien trouvé un l complexe tel que $P(l) = 0$