

Polynômes

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition	Soit P un polynome non nul de $\mathbb{K}[X]$ de degré n : $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ On appelle polynôme dérivé de P et on note P' le polynôme : $P' = a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1}$
Remarque	- Le polynome dérivé du polynome nul est le polynôme nul. - Dans $\mathbb{R}[X]$ la notion de polynôme dérivé coïncide avec la notion de dérivée de la fonction polynômiale associée. - Nous pouvons de la même manière que nous avons défini P', définir P'', P'''
Propriétés	- Linéarité de la dérivation : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$ $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 (PQ)' = P'Q + Q'P$ $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 (PoQ)' = (P'oQ) * Q'$ $\forall P \in \mathbb{K}[X] \deg(P') = \deg(P) - 1. \forall k \in \mathbb{N} \deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k.$ $\forall P \in \mathbb{K}[X] \text{ avec } \deg(P) = n \text{ alors } P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k$ $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall n \in \mathbb{N}, (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{n-k}$ (formule de Leibnitz)
Preuve	
- Il suffit d'écrire chaque polynôme avec son coefficient. - Posons $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_pX^p$ $PQ = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \text{ avec } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ $(PQ)' = c_1 + 2c_2X + \dots + (n+p)X^{n+p-1} = \sum_{k=0}^{n+p-1} (k+1)c_{k+1} X^k$ $P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1} X^k ; Q' = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)b_{k+1} X^k$ $P'Q = \sum_{k=0}^{n+p-1} d_k X^k \text{ avec } d_k = \sum_{j=0}^k (j+1)a_{j+1}b_{k-j}$ $PQ' = \sum_{k=0}^{n+p-1} e_k X^k \text{ avec } e_k = \sum_{j=0}^k a_j(k+1-j)b_{k+1-j}$ Donc $(P'Q + Q'P) = \sum_{k=0}^{n+p-1} (e_k + d_k)X^k = \sum_{k=0}^{n+p-1} f_k X^k$ avec $f_k = e_k + d_k = \sum_{j=0}^k (j+1)a_{j+1}b_{k-j} + \sum_{j=0}^k a_j(k+1-j)b_{k+1-j} = \sum_{j=1}^{k+1} ja_jb_{k+1-j} + \sum_{j=0}^k a_j(k+1-j)b_{k+1-j} =$ $\sum_{j=1}^{k+1} ja_jb_{k+1-j} + \sum_{j=0}^k a_j(k+1)b_{k+1-j} - \sum_{j=0}^k ja_jb_{k+1-j} = (k+1)a_{k+1}b_0 + \sum_{j=0}^k a_j(k+1)b_{k+1-j}$ $= (k+1) \left[a_{k+1}b_0 + \sum_{j=0}^k a_jb_{k+1-j} \right] = (k+1) \sum_{j=0}^{k+1} a_jb_{k+1-j} = (k+1)c_{k+1}$ Nous avons donc bien $(PQ)' = P'Q + PQ'$ - Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_pX^p. P' = \sum_{k=1}^n (k)a_k X^{k-1}$ $PoQ = \sum_{k=0}^n a_k Q^k \Rightarrow (PoQ)' = \sum_{k=1}^n a_k (Q^k)'$ Montrons par récurrence que : $(Q^k)' = kQ'Q^{k-1}$ pour $k \geq 1$ Pour $k = 1$ c'est réglé Supposons le vrai pour tout $k \leq 1$: $(Q^k)' = kQ'Q^{k-1}$ $(Q^{k+1})' = (QQ^k)' = Q'Q^k + Q(Q^k)' = Q'Q^k + kQQ'Q^{k-1} = (k+1)Q'Q^k$ Donc c'est vrai aussi à l'ordre $k + 1$ Il vient $(PoQ)' = \sum_{k=1}^n a_k (Q^k)' = \sum_{k=1}^n k a_k Q'Q^{k-1} = Q' \sum_{k=1}^n k a_k Q^{k-1} = (P'oQ)Q'$ $\deg(P') = \deg(P) - 1$ (évident). $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$ s'en déduit à l'aide d'une récurrence évidente. - Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ Si $l > n$ $P^{(l)} = 0$ Sinon $P^{(l)} = \sum_{k=l}^n a_k k(k-1) \dots (k-l+1) X^{k-l}$. Le coefficient constant de ce polynôme est $a_l * l!$ Nous avons donc pour $0 \leq l \leq n$ $P^{(l)}(0) = a_l * l! \Rightarrow a_l = \frac{P^{(l)}(0)}{l!}$. Nous avons donc bien $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$	

Posons maintenant $Q = P(X - \lambda)$ Nous avons $P^{(k)}(0) = Q^{(k)}(\lambda)$

Donc $Q = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k$. P ayant été choisi de manière arbitraire, Q l'est aussi.

6. Par récurrence sur n .

Initialisation : $n = 1$ est évident.

Hérédité : Supposons que ce soit vrai à l'ordre n . $\forall k \leq n, (PQ)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P^{(j)} Q^{(k-j)}$

Montrons le à l'ordre $n + 1$

$$\begin{aligned} (PQ)^{(n+1)} &= [(PQ)^{(n)}]' = \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P^{(j)} Q^{(n-j)} \right]' = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [P^{(j)} Q^{(n-j)}]' = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [P^{(j+1)} Q^{(n-j)} + P^{(j)} Q^{(n+1-j)}] = \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [P^{(j+1)} Q^{(n-j)}] + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [P^{(j)} Q^{(n+1-j)}] \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} [P^{(j)} Q^{(n+1-j)}] + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [P^{(j)} Q^{(n+1-j)}] \\ &= PQ^{(n+1)} + P^{(n+1)}Q + \sum_{j=1}^n \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right] [P^{(j)} Q^{(n+1-j)}] \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right] [P^{(j)} Q^{(n+1-j)}] \end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée au rang $k + 1$

Propriété

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul et de degré n .

α une racine de P de multiplicité m avec $1 \leq m \leq n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall k \text{ avec } 0 \leq k < m \quad P^{(k)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right\} \text{ avec } 1 \leq m \leq n$

Preuve

Supposons $\left\{ \begin{array}{l} \forall k \text{ avec } 0 \leq k < m \quad P^{(k)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right\} \text{ avec } 1 \leq m \leq n$ Alors le développement de Taylor

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

nous donne $P = \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = (X - \alpha)^m \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{k-m} = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) = \frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!}$ et donc $Q(\alpha) \neq 0$. α est donc bien une racine de P de multiplicité m .

Réciproquement si α une racine de P de multiplicité m avec $1 \leq m \leq n$, nous avons $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$

La formule de Leibnitz, appliquée à P nous donne pour $1 \leq k \leq m$

$$P^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} [(X - \alpha)^m]^{(j)} Q^{(k-j)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m(m-1) \dots (m-j+1) (X - \alpha)^{m-j} Q^{(k-j)}$$

Donc pour $k < m$ nous avons pour $0 \leq j \leq k$, $m - j > 0 \Rightarrow P^{(k)}(\alpha) = 0$

Pour $k = m$ nous avons $P^{(k)}(\alpha) = m! Q(\alpha)$ Nous savons que $Q(\alpha) \neq 0$ donc $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$