Nombres premiers entre eux	
Définition	Soient a et b deux entiers relatifs. a et b sont dits premiers entre eux lorsque $a\Lambda b = 1$
Exemple	$16\Lambda 15 = 1$ donc 16 et 15 sont premiers entre eux.
Remarque	Une autre manière de dire que deux nombres sont premiers entre eux est : leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1
Propriété	Soit p premier et a un entier relatif différent de p. Si $p \nmid a$ alors p et a sont premiers entre eux.
Preuve	p étant premier n'admet comme diviseur que ∓ 1 *et* $\mp p$. Donc $a\Lambda b = 1$ *ssi* $p \nmid a$
Propriété	Soient a et b deux entiers relatifs. Alors $\frac{a}{a\Lambda b}$ et $\frac{b}{a\Lambda b}$ sont premiers entre eux.

Preuve

Restreignons nous pour l'instant à a et b positifs.
Démonstration par l'absurde :
Si $\frac{a}{a\Lambda b}$ et $\frac{b}{a\Lambda b}$ ne sont pas premiers entre eux alors $\exists d > 1$ tel que $d | \frac{a}{a\Lambda b}$ et $d | \frac{b}{a\Lambda b}$. Donc $\exists k$ *et* k' tels que $\frac{a}{a\Lambda b} = dk$ et $\frac{b}{a\Lambda b} = dk'$ donc $a = kda\Lambda b$ et $b = k'da\Lambda b$ donc $da\Lambda b$ est un diviseur commun à a et b et plus grand que $a\Lambda b$. Cela va à l'encontre de la définition de $a\Lambda b$

Dans le cas ou a et b sont de signe négatif nous savons que $div(a) = div(-a)$ et $div(b) = div(-b)$ donc $a\Lambda b = a\Lambda - b = -a\Lambda b = -a\Lambda - b$
Si $a < 0$ $\frac{-a}{-a\Lambda b} \Lambda \frac{b}{a\Lambda b} = 1 \Longrightarrow \frac{-a}{a\Lambda b} \Lambda \frac{b}{a\Lambda b} = 1 \Longrightarrow \frac{a}{a\Lambda b} \Lambda \frac{b}{a\Lambda b}$ de même si $b < 0$

Exemple	Soient $a = 48$ et $b = 42$. $a\Lambda b = 6$. $\frac{a}{a\Lambda b} = \frac{48}{6} = 8$ et $\frac{b}{a\Lambda b} = \frac{42}{6} = 7$ Nous avons donc bien $\frac{a}{a\Lambda b} \Lambda \frac{b}{a\Lambda b} = 1$
Définitions	• Les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont dits premiers entre eux dans leur ensemble *ssi* $a_1 \Lambda a_2 \Lambda \ldots a_n = 1$ • Les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont dits premiers entre eux deux à deux *ssi* $\forall i, j$ avec $i \neq j$ $a_i \Lambda a_j = 1$
Exemple	• Les entiers $12, 16, 9$ sont premiers entre eux dans leur ensemble mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux. $(12 \Lambda 9) \neq 1$ • Les entiers $27, 16, 49$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.
Théorème	C'est le théorème de Bezout. Soient a et b deux entiers relatifs : $a\Lambda b = 1$ *ssi* $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$

Preuve

- Si $a\Lambda b = 1$ alors la relation de Bezout dans sa forme générale nous donne l'existence de u et de v tels que $au + bv = 1$
- Supposons $au + bv = 1$. Soit d entier relatif tel que $d \mid a$ et $d \mid b$. Nous avons donc l'existence de k et k' entiers tels que $a = kd$ et $b = k'd$

$$au + bv = 1 \Longrightarrow kdu + k'dv = 1 \Longrightarrow d(ku + k'v) = 1 \Longrightarrow d \mid 1$$
$$\text{Donc } d = \mp 1 \Longrightarrow a\Lambda b = 1$$

Théorème	Ce théorème est appelé théorème de Gauss Soient a, b, c trois entiers relatifs. Si $a \mid bc$ et $a\Lambda b = 1$ alors $a \mid c$

Preuve

Si $a|bc$ et $a\Lambda b = 1$ alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = ka$ et $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$. $au + bv = 1 \Longrightarrow acu + bcv = c \Longrightarrow acu + kav = c \Longrightarrow a(cu + av) = c \Longrightarrow a|c$

Propriété	Soit a, b et p trois entiers relatifs avec p premier. $p \mid ab \Longrightarrow \begin{Bmatrix} p \mid a \\ ou \\ p \mid b \end{Bmatrix}$
Preuve	Supposons $p \mid ab$. Suppons $p \nmid a$. Nous avons donc $p\Lambda a = 1$ donc d'après le théorème de Gauss $p \mid b$ De même si $p \nmid b$ alors $p \mid a$. Dans tous les cas $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Conséquence théorème	Tout nombre rationnel possède une écriture unique de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ avec $p\Lambda q = 1$

Preuve

- Montrons d'abord l'unicité. Supposons $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ avec $p\Lambda q = 1$ et $p'\Lambda q' = 1$
  Si $p = 0$ alors $p' = 0$ et réciproquement.
  Si $pp' \neq 0$.
  Supposons l'existence de p, p', q, q' tels que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ avec $p\Lambda q = 1$, $p'\Lambda q' = 1$, $p \neq p'$ et $q \neq q'$
  $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Longrightarrow pq' = qp'$.
  $p \mid qp'$ et $p\Lambda q = 1$ donc d'après le théorème de Gauss $p \mid p'$. De plus $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Longrightarrow \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q}$
  Il vient $q' = \frac{p'}{p} * q$. Nous avons donc $\frac{p'}{p} \mid q'$ et $\frac{p'}{p} \mid p'$ or $p'\Lambda q' = 1$ donc
  $\frac{p'}{p} = -1\ (car\ p \neq p') \Longrightarrow \frac{q'}{q} = -1$ ce qui est impossible car q et q' sont des entiers naturels.

- Montrons maintenant l'existence.
  Soit r un nombre rationnel. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}^*$ tels que $r = \frac{a}{b}$
  Supposons $b > 0$ alors $r = \frac{\frac{a}{a\Lambda b}}{\frac{b}{a\Lambda b}}$ avec $\frac{a}{a\Lambda b} \Lambda \frac{b}{a\Lambda b} = 1$. L'existence est donc montrée.
  Si $b < 0$ Nous écrivons $r = \frac{-a}{-b} = \frac{\frac{-a}{-a\Lambda -b}}{\frac{-b}{-a\Lambda -b}}$. Avec $\frac{-a}{-a\Lambda -b} \Lambda \frac{-b}{-a\Lambda -b} = 1$ et l'existence est là encore montrée.