

Polynômes

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition

On appelle polynôme à une indéterminée une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres de $\mathbb{K}$ tels que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq p, a_k = 0$
 Un polynôme est donc une suite de nombres ne comportant que des 0 à partir d'un certain rang.
 Plutôt que de noter $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ un polynôme on a l'habitude de noter $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ lorsque a_n est le dernier coefficient non nul.

- Les $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients du polynôme
- X est appelée l'indéterminée
- n est appelé le degré du polynôme. Dans le cas où le polynôme P est nul (tous ses coefficients sont nuls) on a par convention $\deg(P) = -\infty$. On note le polynôme nul : $\tilde{0}$
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$
- L'ensemble des polynômes de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}_n[X]$
- Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant.
- Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant est égal à 1.
- Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Il est noté $\tilde{0}$

Exemple

Le polynôme (a_0, a_1, a_2) sera noté $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$

Remarque

Attention il ne faut pas confondre le polynôme P défini par une suite de coefficients avec la fonction polynomiale associée. Connaître $x \rightarrow 2x^2 - x + 1$ c'est connaître le graphe qui associe à chaque réel son image par cette fonction. Ce n'est pas directement connaître les coefficients du polynôme $P = 2X^2 - X + 1$

Définition

Soient $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Nous définissons sur $\mathbb{K}[X]$ deux lois de composition interne :

- $+$ définie par $P + Q = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $*$ définie par $P * Q = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Remarque

Vous savez déjà additionner et multiplier deux polynômes.
 Soient $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 1 - 2X$.
 $P + Q = 2 - X + X^2$ et $PQ = (1 + X + X^2)(1 - 2X) = 1 + X + X^2 - 2X - 2X^2 - 2X^3 = 1 - X - X^2 - 2X^3$

Propriété

$(\mathbb{K}[X], +, *)$ est un anneau commutatif.

Preuve

Je me contente ici de citer tous les points d'étape à démontrer. Leurs démonstrations bien qu'élémentaires méritent que vous vous y intéressiez.

- Il faut vérifier que $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe commutatif unitaire.
 - $+$ est une loi de composition interne commutative pour $\mathbb{K}[X]$ (La somme de deux polynômes est un polynôme)
 - $\tilde{0}$ est l'élément neutre pour l'addition
 - Tout polynôme P admet son inverse pour l'addition : $-P$
- La loi $*$ est une loi de composition interne pour $\mathbb{K}[X]$ (Le produit de deux polynômes est un polynôme)
- La loi $*$ est commutative. $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, PQ = QP$
- La loi $*$ est associative et distributive par rapport à l'addition. $P(Q + R) = PQ + PR = (Q + R)P$ et $P(QR) = (PQ)R$
- La loi $*$ possède un élément neutre : (1) soit $Q = 1$

Propriété

Soient P, Q, R trois polynômes définis par $R = P + Q$ alors $\deg R \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Preuve

Soient $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$

- Si $n = p$ $P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n$. Donc $\deg(P + Q) \leq n \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- Si $n \leq p$ $P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n + b_{n+1}X^{n+1} + \dots + b_pX^p$. Donc $\deg(P + Q) \leq p \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Propriété

Soient P, Q, R trois polynômes définis par $R = PQ$ alors $\deg R = \deg P + \deg Q$

Preuve

Soient $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$

$$PQ = (a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n)(b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p) \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^p a_k b_j X^{k+j} = \sum_{k=0}^{n+p} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) X^k = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)X + \dots + a_n b_p X^{n+p}$$

$a_n b_p \neq 0$ donc $\deg(PQ) = n + p = \deg P + \deg Q$

Exemple	Soient $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 1 - 2X$. Nous avons $\deg P = 2$ et $\deg Q = 1$ $\deg(P + Q) = 2$; $\deg(PQ) = 3$; (Nous avons déjà vu que $P + Q = 2 - X + X^2$ et $PQ = 1 - X - X^2 - 2X^3$)
Propriété	L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, *)$ est intègre. Cela signifie que $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2 \quad PQ = \tilde{0} \Rightarrow P = \tilde{0} \text{ ou } Q = \tilde{0}$
Preuve	
$PQ = \tilde{0} \Rightarrow \deg(PQ) = -\infty \Rightarrow \deg(P) + \deg(Q) = -\infty \Rightarrow \deg(P) = -\infty \text{ ou } \deg(Q) = -\infty \Rightarrow P = \tilde{0} \text{ ou } Q = \tilde{0}$	
Propriété	Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p$ Le polynôme $P \circ Q$ est le polynôme défini par $P \circ Q = a_0 + a_1Q + \dots + a_nQ^n$
Exemple	Soient $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 1 - 2X$ $P \circ Q = 1 + (1 - 2X) + (1 - 2X)^2 = 2 - 2X + 1 + 4X^2 - 4X = 3 - 6X + 4X^2$
Propriété	Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. - Si $\deg(P) = -\infty$ $\deg(P \circ Q) = -\infty$ - Si $\deg(P) \neq -\infty$ et $\deg(Q) = -\infty$ alors $\deg(P \circ Q) = 0$ - Si $\deg(P) \neq -\infty$ et $\deg(Q) \neq -\infty$ alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$
Preuve	
Les deux premiers points sont évidents. Démontrons le troisième. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p$ avec $a_nb_p \neq 0$ $P \circ Q = a_0 + a_1Q + \dots + a_nQ^n$ $P \circ Q = a_0 + a_1(b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p) + a_2(b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p)^2 + \dots + a_n(b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p)^n$ Le terme de plus haut degré dans ce développement est $a_nb_p^nX^{p \cdot n}$. $a_nb_p^n \neq 0$ donc $\deg(P \circ Q) = pn = \deg(P)\deg(Q)$	