Polynômes

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$: $P(X) = a_0, +a_1X + a_2X^2 + \cdots a_nX^n$
La fonction polynôme associée s'appelle aussi P et est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0, +a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$$

Remarque

Si l'utilisation du même symbole pour la fonction polynôme et le polynôme peut vous paraitre étrange, cela se justifiera par la suite par le fait que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs fonctions polynomiales sont égales.

Propriété (Méthode de Horner)

Soit P une fonction polynomiale définie par $P : x \to a_0, +a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$
Evaluer P en x_0, revient à calculer $P(x_0) = a_0, +a_1x_0 + a_2{x_0}^2 + \cdots a_n{x_0}^n$
Ce calcul peut se réaliser de deux manières :

- Déterminer les ${x_0}^p$ $(1 \leq p \leq n)$ et ensuite les coefficienter par les a_p. Simple mais couteux en opérations
- Utiliser la méthode de Horner :
  Il s'agit de calculer $P(x_0)$ de cette manière :

$$P(x_0) = \Big(\big(\ldots\big((a_nx_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2}\big)x_0 + \cdots\big)x_0 + a_1\Big)x_0 + a_0$$

Pour cela on peut utiliser le tableau suivant :

Coefficients de P	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
Facteur x_0	a_n	$a_nx_0 + a_{n-1}$	$(a_nx_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2}$	…	q_0	$P(x_0) = q_0x_0 + a_0$

Exemple

Calculons $P(2)$ avec $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 3x - 5$

Coefficients de P	4	−7	3	−5
Facteur 2	4	8 − 7 = 1	2 + 3 = 5	P(2) = 10 − 5 = 5

Définition

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. α est dite racine de P lorsqu'elle annule la fonction polynomiale associée, cad lorsque $P(\alpha) = 0$

Propriété

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. α racine de $P \Leftrightarrow P$ divisible par $X - \alpha$

Preuve

Réalisons la division euclidiienne de P par $X - \alpha$. $P = (X - \alpha)Q + R$ avec $\deg R < 1$ $(\deg(X - \alpha) = 1)$
Il vient $P(\alpha) = R(\alpha)$. Le degré de R étant < 1, le polynôme R est constant. Il vient $P = (X - \alpha) + P(\alpha)$
Nous avons donc l'équivalence : $P(\alpha) = 0$ ssi P divisible par $X - \alpha$

Exemple

Trouvons le reste de la division eucliienne de $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
Nous savons que $X^5 - X^2 + 2 = (X^2 + 1) + R$ avec $\deg R < 2$
Nous pouvons donc écrire $R = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$
Nous savons aussi que i et $-i$ sont racines de $X^2 + 1$.
Nous avons donc la factorisation suivante $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$
Evaluons l'expression suivante $X^5 - X^2 + 2 = (X^2 + 1)Q + aX + b$ en i et $-i$
Il vient $\begin{Bmatrix} i^5 - i^2 + 2 = ai + b \\ (-i)^5 - (-i)^2 + 2 = a(-i) + b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} i + 3 = ai + b \\ -i + 3 = -ai + b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} i + 3 = ai + b \\ 6 = 2b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} i + 3 = ai + 3 \\ 3 = b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1 = a \\ 3 = b \end{Bmatrix}$
Donc $X^5 - X^2 + 2 = (X^2 + 1)\,Q + X + 1$

Propriété

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul $\alpha \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\ tq\ (X - \alpha)^n | P\}$ admet un plus grand élément

Preuve

$A = \{n \in \mathbb{N}\ tq\ (X - \alpha)^n | P\}$ est non vide. En effet $0 \in A$
A est majoré par $\deg(P) + 1$. En effet si $(X - \alpha)^n | P$ alors $n \leq \deg(P)$. Nous en déduisons donc que A admet un plus grand élément.

Définition

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $p = max\{n \in \mathbb{N} \ \ tq \ (X-\alpha)^n | P\}$
p est appelé la multiplicité de α dans $\mathbb{K}$

Remarque

- Si $p = 0$ cela signifie que α n'est pas une racine de P
- Si $p > 0$ cela signifie que $(X-\alpha)^p | P$ mais que $(X-\alpha)^{p+1} \nmid P$
  Nous avons donc $P = (X-\alpha)^p Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$

Exemple

Soit $P = (X-1)^2(X-3)$. 2 est racine de multiplicité 2 de ce polynôme.

Théorème

Soit α une racine complexe d'un polynôme P dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}$. Alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P de même multiplicité

Preuve

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$: $P = a_0, +a_1X + a_2X^2 + \cdots a_nX^n$. α racine complexe de multiplicité p.
Donc dans $\mathbb{C}[X]$ nous avons $P = (X-\alpha)^p Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$
Prenons le conjugué de cette égalité. Nous obtenons : $\bar{P} = (X-\bar{\alpha})^p \bar{Q}$
Or P est à coefficients réels. Donc $\bar{P} = P$. Nous avons donc $P = (X-\bar{\alpha})^p \bar{Q}$.

Il vient $(X-\bar{\alpha})^p | P$ et $\bar{Q}(\bar{\alpha}) = \overline{Q(\alpha)} \neq 0$ donc $\bar{\alpha}$ est bien une racine de multiplicité p de P

Théorème

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ p racines de P de multiplicité $m_1, m_2, \dots m_p$.
Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_p} Q$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ qui ne sont pas racines de Q.

Preuve

Prouvons le par récurrence. Supposons $1 \leq n \leq p$ et posons
$P(n) :\ \exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_n} Q$
Initialisation : $P(1)$ est vérifiée. C'est la définition de α_1 racine de P de multiplicité m_1
Hérédité : Supposons $P(n)$ vérifiée avec $1 \leq n < p$ et prouvons $P(n+1)$
$P(n)$ est vérifiée, donc $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_n} Q$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ qui ne sont pas racines de Q.
Or α_{n+1} racine de P de multiplicité m_{n+1} donc α_{n+1} est aussi racine de Q. Appelons m la multiplicité de α_{n+1} dans Q.
$m \leq m_{n+1}$ car m_{n+1} est la multiplicité de α_{n+1} dans P et $Q|P$
Nous avons $Q = (X-\alpha_{n+1})^m Q'$ avec α_{n+1} qui n'est pas une racine de Q' et donc

$$P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_n}(X-\alpha_{n+1})^m Q' \ (*)$$

Du fait que α_{n+1} soit racine de P de multiplicité m_{n+1} nous pouvons aussi écrire :
$P = (X-\alpha_{n+1})^{m_{n+1}} Q''$ avec α_{n+1} qui n'est pas une racine de Q''.
Nous avons donc :

$$(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots \left(X-\alpha_p\right)^{m_n}(X-\alpha_{n+1})^m Q' = (X-\alpha_{n+1})^{m_{n+1}} Q''$$

L'anneau étant intègre nous pouvons diviser à droite et à gauche par $(X-\alpha_{n+1})^m$
Il vient

$$(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots \left(X-\alpha_p\right)^{m_n} Q' = (X-\alpha_{n+1})^{m_{n+1}-m} Q''$$

Supposons que $m < m_{n+1}$ nous aurions α_{n+1} racine de $(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots \left(X-\alpha_p\right)^{m_n} Q'$ ce qui est impossible car α_{n+1} n'est pas une racine de Q'.
Donc $m = m_{n+1}$. En revenant à $(*)$
Il vient :

$$P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_n}(X-\alpha_{n+1})^{m_{n+1}} Q' \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n+1} \text{ qui ne sont pas des racines de } Q''$$

Exemple

Soit $P = (X-1)^3(X+1)^2(X-2)^5$. P admet $-1, 1$ et 2 comme racines de multiplicité $3, 2, 5$

Théorème

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité

Preuve

Nous avons vu que si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ p racines de P de multiplicité $m_1, m_2, \dots m_p$.
Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_p} Q$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ qui ne sont pas racines de Q.

Cela implique $m_1 + m_2 + \cdots m_p \leq \deg(\mathrm{P})$

Remarque

Cela entraine plusieurs choses :
- Seul le polynôme nul possède une infinité de racines.
- Soient P_1 et P_2 deux polyômes et $\widetilde{P_1}$ et $\widetilde{P_2}$, leurs fonctions polynômes associées. Il est évident que si $P_1 = P_2$ alors $\widetilde{P_1} = \widetilde{P_2}$. Par contre la réciproque n'était jusqu'à présent pas évidente. Le théorème précédent lève le doute. $\widetilde{P_1} = \widetilde{P_2} \Rightarrow \widetilde{P_1} - \widetilde{P_2} \Rightarrow \widetilde{P_1 - P_2} = \tilde{0}$. $\widetilde{P_1 - P_2}$ s'annule en une infinité de points. Le polynôme $P_1 - P_2$ a donc une infinité de racines, il est nul.

Exercice	Résoudre l'équation où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$	
	1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$	2. $PoP = P$

Solution

1. Le polynôme nul fait bien entendu l'affaire. Supposons P non nul

La relation $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ nous donne $2\deg(P) = \deg(P) + 2 \Rightarrow \deg(P) = 2$
Soit α une racine de P , $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ …. sont aussi racines de P. En effet $P(\alpha^2) = (\alpha^2+1)P(\alpha) = 0$
Le polynôme étant non nul, le nombre de racines ne peut être infini. $\exists p$ et q deux entiers tels que $\alpha^{2^p} = \alpha^{2^q}$

Ce qui en supposant que $p \leq q$ nous donne $\alpha^{2^p}\left(1 - \alpha^{2^q-2^p}\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha^{2^p} = 0 \\ ou \\ \alpha^{2^q-2^p} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \in \{0,1,-1\}$

Placons nous dans $\mathbb{C}[X]$. $P(i^2) = (i^2+1)P(i) = 0 \Rightarrow P(-1) = 0$
De plus $P((-1)^2) = 2P(-1) = 0$ donc $P(1) = 0$ aussi. Les deux seules racines sont donc 1 et -1 ce qui implique : $P = K(X-1)(X+1)$ avec K réel.
Réciproquement nous pouvons constater que si $P = K(X-1)(X+1) = K(X^2-1)$
Alors $P(X^2) = K(X^4-1) = K(X^2-1)(X^2+1) = (X^2+1)P(X)$.

2. Là encore le polynôme nul fait bien entendu l'affaire. Supposons P non nul.

La relation $PoP = P$ nous donne $\deg(P)^2 = \deg(P) \Rightarrow \deg(P) \in \{0,1\}$
Si $\deg(P) = 0$, c'est un polynôme constant.
Si $\deg(P) = 1$ alors $P = aX + b$

$$PoP = P \Leftrightarrow a(aX+b) + b = ax + b \Leftrightarrow a^2X + ab + b = ax + b \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a^2 = a \\ ab + b = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a \in \{0,1\} \\ ab = 0 \end{matrix}\right\}$$

a ne peut être nul, sinon cela signfierait que $\deg(P) = 0$
Donc $a = 1$ et $b = 0 \Rightarrow P = X$

Réciproquement les polynôme $P = X, P = cste$ fonctionnent parfaitement.

Définition	Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé s'il peut s'écrire $P = C(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_n}$ où $C \in \mathbb{K}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ sont les racines de P de multiplicité $m_1, m_2, \dots m_p$. La forme $C(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_p)^{m_n}$ s'appelle la forme factorisée de P
Exemple	Le polynôme $P = X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ car $P = (X-i)(X+i)$ mais par contre n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$
Remarque	Nous verrons plus tard que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Cela fera l'objet d'un théorème.