Polynômes

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels. $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur à $n - 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

Définition	Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n valeurs distinctes de $\mathbb{K}$. On appelle polynômes d'interpolation de Lagrange les n polynômes notés $L_1, L_2, \dots, L_n$ définis par $L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n (x_i - x_k)}$	
Remarque	Pour tous i, j entiers compris entre 1 et n $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	Les polynômes de Lagrange appartiennent à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$
Théorème	Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n valeurs distinctes de $\mathbb{K}$. $\forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}, \exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \dots, P(x_n) = y_n$. Ce polynôme est égal à $P = \sum_{i=1}^n y_i L_i$	

Preuve

Montrons l'existence. $P = \sum_{i=1}^n y_i L_i$ appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
 Pour tout j compris entre 1 et n , $P(x_j) = y_j L_j(x_j) = y_j$. L'existence est montrée
 Montrons maintenant l'unicité. Soient P et Q deux polynômes possédant cette propriété. Le polynôme $R = P - Q$ vérifie pour tout j entier entre 1 et n , $R(x_j) = P(x_j) - Q(x_j) = y_j - y_j = 0$
 Ce polynôme possède donc n racines. Or par construction il appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
 Son degré est donc inférieur à $n - 1$. C'est donc le polynôme nul. $R = 0 \Rightarrow P = Q$ L'unicité est démontrée.

Remarque	Il est donc possible d'interpoler n'importe quelle fonction f dont les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_n$ en n points distincts : $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont connues par un polynôme P . Il y a des chances que si cette fonction et le polynômes coïncident en n points, les courbes de la fonction et du polynôme soient proches au voisinage de ces points. Bien entendu plus le nombre de points augmente dans un espace restreint plus la fonction et son polynôme interpolateur seront proches.	
Théorème	Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n valeurs distinctes de $\mathbb{K}$. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. P est entièrement déterminé par les valeurs prises sur les x_i . $P = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i$	

Preuve

Soit $Q = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i$. Remarquons que $\forall i Q(x_i) = P(x_i)$. Q et P coïncident donc sur les x_i
 Peut-il y avoir un autre polynôme que Q de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie cette propriété. Supposons que ce polynôme existe et s'appelle R . Construisons alors $S = R - Q$. Ce polynôme s'annule en chaque x_i . Il possède donc n racines bien que son degré soit $\leq n - 1$. Il est donc nul et $R = Q$. Q est bien le seul polynôme vérifiant cette propriété.