Polynômes

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.
Soit A un poynôme quelconque. Nous noterons $A\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes multiples de A

Définition	Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Nous appellerons $PPCM$ de A et de B tout polynôme multiple de A et de B de degré minimal. Parmi eux un seul est unitaire, nous le noterons $A \vee B$

Preuve de l'existence

$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des multiples communs de A et de B. $\deg(\, A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]\,)$ désigne l'ensemble des degrés des multiples communs de A et de B. C'est une sous partie de $\mathbb{N}$ non vide : ($AB \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ donc $\deg(AB) \in \deg(\, A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]\,)$). Cette sous partie est minorée par 0. Elle admet donc un élément minimal.
Appelons le n. Tout multiple commun de A et de B de degré n est donc un $PPCM$ de A et B. Soit P un $PPCM$ de A et de B. Nous avons allons montrer que $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X]$
Soit $Q \in P\mathbb{K}[X]$. $\exists R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$ or $P \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ donc $\exists S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AS$ et $\exists T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = BT$ il vient $Q = ASR$ et $Q = BTR$ donc $Q \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \Rightarrow \boldsymbol{P}\mathbb{K}[\boldsymbol{X}] \subset \boldsymbol{A}\mathbb{K}[\boldsymbol{X}] \cap \boldsymbol{B}\mathbb{K}[\boldsymbol{X}]$
Soit $Q \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$. P étant aussi un multiple commun de A et de B de degré minimal nous avons :
$\deg(Q) \geq \deg(P)$. Réalisons la division euclidienne de Q par P. $\exists (L, M) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tels que $Q = PL + M$ avec $\deg(M) < \deg(P)$.
Nous avons $M = Q - PL$. Q et P sont des multiples communs de A et B. Donc M aussi.
Si M est non nul nous avons un polynôme multiple communs de A et B dont le degré est strictement inférieur à celui de P. C'est une contradiction. Nous en déduisons $M = 0$. Il vient $Q = PL \Rightarrow Q \in P\mathbb{K}[X]$. $\boldsymbol{A}\mathbb{K}[\boldsymbol{X}] \cap \boldsymbol{B}\mathbb{K}[\boldsymbol{X}] \subset \boldsymbol{P}\mathbb{K}[\boldsymbol{X}]$
Nous avons donc bien $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X]$
Tout $PPCM$ de A et de B est donc un multiple de P. Tous les $PPCM$ ayant le même degré (minimal), nous en déduisons qu'ils se déduisent l'un de l'autre par une multiplication par un scalaire. Parmi eux un seul est unitaire, nous le noterons $A \vee B$

Propriété	Soit C un $PPCM$ de A et de B. $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = C\mathbb{K}[X]$ En particulier $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = A \vee B\ \mathbb{K}[X]$

Preuve

Toute la preuve est située ci-dessus.

Propriété	Le $PPCM$ est associatif. Soient A, B et C trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

Preuve

Nous avons que $(A \vee B\,)\mathbb{K}[X] \cap C\mathbb{K}[X] = \big((A \vee B\,) \vee C\big)\mathbb{K}[X]$
Or $(A \vee B\,)\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ donc $\big((A \vee B\,) \vee C\big)\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \cap C\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \cap (B\mathbb{K}[X] \cap C\mathbb{K}[X]) = A\mathbb{K}[X] \cap (B \vee C\,)\mathbb{K}[X] = \big(A \vee (B \vee C\,)\big)\mathbb{K}[X]$. Nous avons donc $\big((A \vee B\,) \vee C\big)\mathbb{K}[X] = \big(A \vee (B \vee C\,)\big)\mathbb{K}[X]$
Les polynômes $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ sont multiples l'un de l'autre. Ils diffèrent donc à une constante multiplicative près. Ils sont tous les deux unitaires. La constante est donc égale à 1. Nous avons donc

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Définition	La notion de $PPCM$ est généralisable à plusieurs polynômes : Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tous non nuls. On appelle $PPCM(A_1, A_2, \dots A_n)$ tout polynôme mutiple commun de $A_1, A_2, \dots A_n$ de degré minimal. Parmi ces polynômes, un seul est unitaire on le note $A_1 \vee A_2 \vee \dots A_n$

Preuve

L'existence d'un tel PPCM se détermine par récurrence.
Soit $P(n)$: $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A_1\mathbb{K}[X] \cap A_2\mathbb{K}[X] \ldots \cap A_n\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X]$
Initialisation : cas $n = 2$. Déjà fait précédemment.
Hérédité : Supposons que ce soit vrai à l'ordre n. Montrons-le à l'ordre $n + 1$

$$A_1\mathbb{K}[X] \cap A_2\mathbb{K}[X] \ldots \cap A_{n+1}\mathbb{K}[X] = (A_1\mathbb{K}[X] \cap A_2\mathbb{K}[X] \ldots \cap A_n\mathbb{K}[X]) \cap A_{n+1}\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \cap A_{n+1}\mathbb{K}[X] = (P \vee A_{n+1})\mathbb{K}[X]$$

La récurrence est donc démontrée.

$$\forall n, \exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } A_1\mathbb{K}[X] \cap A_2\mathbb{K}[X] \ldots \cap A_n\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X]$$

Prenons maintenant Q un multiple commun de $A_1, A_2, \ldots A_n$ de degré minimal. Nous savons que $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A_1\mathbb{K}[X] \cap A_2\mathbb{K}[X] \ldots \cap A_n\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X]$

Nous avons $Q \in A_1\mathbb{K}[X] \cap A_2\mathbb{K}[X] \ldots \cap A_n\mathbb{K}[X]$. Donc $Q \in P\mathbb{K}[X] \Rightarrow Q$ est un multiple de P. Or Q est de degré minimal donc $\deg(Q) = \deg(P)$
Donc nous avons donc montré que $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$
Tous les polynômes multiples communs de $A_1, A_2, \ldots A_n$ de degré minimal s'écrivent donc sous la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
La réciproque est évidente :
Tout polynôme Q de la forme $Q = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ vérifie $Q\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] = A_1\mathbb{K}[X] \cap A_2\mathbb{K}[X] \ldots \cap A_n\mathbb{K}[X]$. C'est donc un multiple commun de $A_1, A_2, \ldots A_n$. Supposons qu'il existe un multiple commun à $A_1, A_2, \ldots A_n$ de degré inférieur. Ce multiple sera alors un multiple de Q ce qui amène une contradiction.
Nous avons donc $Q\ PPCM(A_1, A_2, \ldots A_n)\ ssi\ Q = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$
Parmi ces polynômes, un seul est unitaire on le note $A_1 \vee A_2 \vee \ \ldots A_n$

Propriété	Soient A et B deux polynômes unitaires. $AB = (A \wedge B)(A \vee B)$

Preuve

Nous savons que $\frac{AB}{A \wedge B} = A * \frac{B}{A \wedge B} = B * \frac{A}{A \wedge B}$ Donc $\frac{AB}{A \wedge B} \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$. Or nous savons par définition que

$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = (A \vee B)\mathbb{K}[X] \text{ donc } \frac{AB}{A \wedge B} \in (A \vee B)\mathbb{K}[X]$$

$$\exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \frac{AB}{A \wedge B} = P(A \vee B) \Rightarrow AB = P(A \vee B)(A \wedge B)$$

Si $\deg(P) > 0$ alors $P(A \wedge B)$ devient un diviseur de AB de degré supérieur à $A \wedge B$.
Cela est contraire à la définition de $A \wedge B$. Nous en déduisons $\deg(P) = 0$
P est donc un scalaire. A et B sont unitaires, donc AB l'est aussi. Par définition $A \vee B$ et $A \wedge B$ le sont aussi. Nous en déduisons $P = 1$. Nous avons bien $AB = (A \vee B)(A \wedge B)$