

Polynômes

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition

- Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont premiers entre eux ssi ils n'ont pas d'autre diviseur commun que le polynôme scalaire. On note A et B premiers entre eux ssi $A \wedge B = 1$
- Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tous non nuls.
 - $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits premiers entre eux dans leur ensemble ssi $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = 1$
 - $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits premiers entre eux deux à deux ssi $\forall (i, j) \text{ avec } i \neq j \quad A_i \wedge A_j = 1$

Théorème

C'est le théorème de Bezout. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$
 $A \wedge B = 1$ ssi $\exists (U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tels que $UA + VB = 1$

Preuve

Nous avons vu d'après la relation de Bezout que si $\exists (U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tels que $UA + VB = A \wedge B$
Donc si $A \wedge B = 1$ nous avons bien l'existence de U et V tels que $UA + VB = 1$
Réciproquement supposons qu'il existe U et V tels que $UA + VB = 1$
Soit D un diviseur commun de A et de B nous avons $A = DR$ et $B = DS$. La relation $UA + VB = 1$
nous donne donc $UDR + VDS = 1 \Rightarrow D(UR + VS) = 1$ donc D divise 1 ce qui implique $\deg(D) = 0$.
Nous avons bien $A \wedge B = 1$

Théorème

Ce théorème est généralisable dans le cas de n polynômes.
Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tous non nuls.
 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = 1$ ssi $\exists (U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$ tels que $U_1 A_1 + U_2 A_2 + \dots + U_n A_n = 1$

Preuve

Là encore la relation de Bezout nous donne un sens du théorème.
Nous savons que $\exists (U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$ tels que $U_1 A_1 + U_2 A_2 + \dots + U_n A_n = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$
Donc si $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = 1$ nous avons bien l'existence de $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ tels que $U_1 A_1 + U_2 A_2 + \dots + U_n A_n = 1$
Réciproquement. Supposons qu'il existe $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ dans $(\mathbb{K}[X])^n$ tels que $U_1 A_1 + U_2 A_2 + \dots + U_n A_n = 1$
Soit D un diviseur commun de $A_1, A_2, \dots, A_n$. $A_1 = DP_1, A_2 = DP_2, \dots, A_n = DP_n$
Donc $U_1 A_1 + U_2 A_2 + \dots + U_n A_n = 1 \Rightarrow U_1 DP_1 + U_2 DP_2 + \dots + U_n DP_n = 1 \Rightarrow D(U_1 P_1 + U_2 P_2 + \dots + U_n P_n) = 1 \Rightarrow D$ divise 1.
Donc $\deg(D) = 0$. Nous avons bien $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = 1$

Propriété

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
 $\frac{A}{A \wedge B} \wedge \frac{B}{A \wedge B} = 1$

Preuve

Supposons $\frac{A}{A \wedge B} \wedge \frac{B}{A \wedge B} = C$ avec $\deg(C) > 0$. Nous aurions $C \mid \frac{A}{A \wedge B}$ et $C \mid \frac{B}{A \wedge B}$ donc $CA \wedge B$ serait un diviseur commun de A et de B ce qui rentre en considération avec le fait que $A \wedge B$ est un diviseur commun de A et de B de degré maximal.

Propriété

La propriété précédente est généralisable dans le cas de n polynômes.
Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tous non nuls.
 $\frac{A_1}{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n} \wedge \frac{A_2}{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n} \wedge \dots \wedge \frac{A_n}{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n} = 1$

Preuve

C'est la même preuve que dans le cas $n = 2$

Théorème

C'est le théorème de Gauss appliqué aux polynômes.
Soient A, B et C trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$
On suppose $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$ alors $A \mid C$

Preuve

Si $A \wedge B = 1$ le théorème de Bezout nous donne l'existence de U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que
 $UA + BV = 1 \Rightarrow UAC + VBC = C$
Or $A \mid BC$ donc $BC = AD$ avec $D \in \mathbb{K}[X]$
Nous avons donc $UAC + VAD = C \Rightarrow A(UC + VD) = C \Rightarrow A \mid C$

Remarque

Bien entendu, de la même manière que dans $\mathbb{N}$ il existe des nombres premiers, il existe aussi dans $\mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers. Ces polynômes ne sont divisibles que par un polynôme scalaire ou eux même. Nous verrons dans le chapitre dédié aux polynômes scindés sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ que ces polynômes sont dans $\mathbb{C}[X]$ exactement les polynômes de degré 1, alors que dans $\mathbb{R}[X]$ ce sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif.

Propriété	Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et P premier dans $\mathbb{K}[X]$ de degré non nul. $A \wedge P = 1$ ssi $P \nmid A$
Preuve	
Si $A \wedge P = 1$, le théorème de Bezout nous donne l'existence de U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que : $UA + PV = 1$ Supposons $P A$ nous avons $A = PP'$. Il vient $UPP' + PV = 1 \Rightarrow P(UP' + V) = 1 \Rightarrow P 1$. Nous sommes donc arrivés à une contradiction. Si $P \nmid A$ alors $A \wedge P = 1$. En effet les seuls diviseurs communs de A et de P ne peuvent être que les polynômes scalaires.	
Propriété	Soit P premier dans $\mathbb{K}[X]$ de degré non nul. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ $P AB \Rightarrow P A \text{ ou } P B$ Par l'absurde : Supposons $P \nmid A$ et $P \nmid B$ alors d'après la propriété précédente nous avons $A \wedge P = 1$ et $B \wedge P = 1$. Donc $\exists (U, V)$ et (U', V') tels que $AU + VP = 1$ et $BU' + PV' = 1$ Multiplions ces deux égalités. Il vient $(AU + VP)(BU' + PV') = 1$ $ABUU' + AUPV' + VPBU' + VP^2V' = 1 \Rightarrow ABUU' + P(AUV' + VBU' + VV'P) = 1 \Rightarrow AB \wedge P = 1$ D'après le théorème de Bezout. Or d'après la propriété précédente cela implique $P \nmid AB$ ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. Nous sommes donc arrivés à une contradiction.
Preuve	
Partons de $P AB$ et supposons par l'absurde que $P \nmid A$ et $P \nmid B$. D'après la propriété précédente nous avons $A \wedge P = 1$ et $B \wedge P = 1$. Donc $\exists (U, V)$ et (U', V') tels que $AU + VP = 1$ et $BU' + PV' = 1$ Multiplions ces deux égalités. Il vient $(AU + VP)(BU' + PV') = 1$ $ABUU' + AUPV' + VPBU' + VP^2V' = 1 \Rightarrow ABUU' + P(AUV' + VBU' + VV'P) = 1 \Rightarrow AB \wedge P = 1$ D'après le théorème de Bezout. Or d'après la propriété précédente cela implique $P \nmid AB$ ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. Nous sommes donc arrivés à une contradiction et $P A$ ou $P B$	