Relation binaire	
Définition	Soit E un ensemble. On appelle relation binaire sur E toute partie de E x E Si cette relation binaire est notée R. On note $x\ R\ y\ ssi\ (x, y) \in E$ x E On dit alors que x est en relation avec y par R
Exemple	La relation " $\leq$ " sur $\mathbb{N}$ ou encore la relation "|" (divise) sont des relations binaires sur $\mathbb{N}$
Définition	• La relation binaire R est dite reflexive sur $E\ ssi\ \forall x \in E,\ x\ R\ x$ • La relation binaire R est dite symétrique sur $E\ ssi\ \forall x, y \in E,\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$ • La relation binaire R est dite transitive sur $E\ ssi\ \forall x, y, z \in E,\ x\ R\ y$ et $y\ R\ z \Rightarrow\ x\ R\ z$ • La relation binaire R est dite antisymétrique sur $E\ ssi\ \forall x, y \in E, x\ R\ y$ et $y\ R\ x\ \Rightarrow x = y$
Exemple	• La relation binaire " = "est reflexive, symétrique, transitive et symétrique sur $\mathbb{N}$ • La relation binaire "|" est reflexive, transitive et antisymétrique sur $\mathbb{N}$. Attention elle n'est pas symétrique (« Si 2 divise 6, 6 ne divise pas 2 »)

Relation d'équivalence	
Définition	Soit E un ensemble. On appelle relation d'équivalence sur E toute relatioin binaire sur E à la fois reflexive, symétrique et transitive. On la note "$\sim$" ou " $\equiv$ "
Exemple	• La relation " = " est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ • La relation " $\leq$ " n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ car elle n'est pas symétrique.
Rappel	La relation " $\equiv\ \ldots\ [a]$" qui se lit "est congrus à … modulo a" se définit ainsi : $x \equiv y[a] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k * a$
Propriété	Soit $a \in \mathbb{R}$. La relation " $\equiv\ \ldots\ [a]$" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Preuve

- $\forall x \in\ \mathbb{R},\ x \equiv x[a]$. En effet $x = x + 0 * a$. La relation est donc reflexive
- $\forall x, y \in\ \mathbb{R}$ si $x \equiv y[a]$ cela impliqiue que $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k * a\ \Rightarrow y = x - k * a \Rightarrow y \equiv x[a]$. La relation est donc symétrique
- $\forall x, y, z \in\ \mathbb{R},\ \begin{Bmatrix} x = y[a] \\ y = z[a] \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k * a \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, y = z + k' * a \end{Bmatrix} \Rightarrow x = z + ka + k'a \Rightarrow x = z + (k + k') * a$
  La relation est donc transitive.

Défintions	• Soit E un ensemble et "$\sim$" une relation d'équivalence sur E. L'ensemble $E_x = \{y \in\ E, y \sim x\}$ noté $\dot{x}$ est appelée classe d'équivalence de x. • L'ensemble des classes d'équivalences de E s'appelle ensemble quotient de E par "$\sim$"
Théorème	Soit E un ensemble. L'ensemble des classes d'équivalences de E forme une partitiion de E.

Preuve

- $\forall x \in\ E, x \in \dot{x}$ donc $\dot{x}$ est non vide.
- Nous en déduisons $E \subset \bigcup_{x \in E} \dot{x}$. Soit $y \in \bigcup_{x \in E} \dot{x}$. $\exists x \in\ E, y \in \dot{x}\ \Rightarrow y \in\ E$ donc $\bigcup_{x \in E} \dot{x} \subset\ E$
  Il vient $E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$
- Montrons maintenant que toutes les classes d'équivalence sont disjointes. Soient $\dot{x}$ et $\dot{y}$ les classes d'équivalence de $x, y \in E$. On suppose $\dot{x} \neq \dot{y}$
  Soit $z \in \dot{x} \cap \dot{y} \Rightarrow \begin{Bmatrix} z \in \dot{x} \\ z \in \dot{y} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} z \sim x \\ z \sim y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \sim z \\ z \sim y \end{Bmatrix} \Rightarrow x \sim y$
  Mais si $x \sim y$ cela impique que $\dot{x} \subset \dot{y}$ et $\dot{y} \subset \dot{x}$ soit $\dot{y} = \dot{x}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exemple	Considérons $E = \{0, 1, 2, \ldots\ldots 99\}$ Considérons la relation d'équivalence suivante sur $E, \forall x, y \in\ E,\ \ y \equiv x[10]\ ssi\ \ \exists k \in\ \mathbb{Z}, x = y + 10k$ Il vient $E = \{\ \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}, \dot{7}, \dot{8}, \dot{9}\ \}$

Relation d'ordre	
Définition	Soit E un ensemble. • On appelle relation d'ordre sur E et on note généralement " $\leq$ " toute relation binaire reflexive, transitive et antisymétrique. • Soit R une relation d'ordre sur E. On dit que R est totale lorsque $\forall x, y \in E, x \leq y$ ou $y \leq x$
Exemple	• La relation " $\leq$ " lue « inférieur ou égal à » est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}$ • Soit E un ensemble quelconque. La relation " $\subset$ " lue « est inclus dans » est une relation d'ordre non totale lorsque E contient au moins deux élements. SI $E = \{1, 2\}$, {1}⊄{2} et {2}⊄{1} • La relation "|" lue « divise » est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ mais n'est pas totale. En effet $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$
Définition	Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre " $\leq$ ". La relation " $<$ " définie sur E par "$x < y$" $ssi \begin{Bmatrix} x \leq y \\ et \\ x \neq y \end{Bmatrix}$ est transitive et antisymétrique. Elle est appelée relation stricte associée à " $\leq$ "
Exemple	• La relation " $<$ " lue « strictement inférieur à » est la relation stricte associée à " $\leq$ " (inférieur ou égal) dans $\mathbb{N}$ • La relation " $\subsetneq$ " lue « strictement inclus dans » est la relation stricte associée à " $\subset$ " (inclus dans)