

Polynômes

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels. Nous admettrons aussi que tout polynôme de $\mathbb{C}$ soit scindé. (Nous y reviendrons dans un autre chapitre)

Définition

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ **scindé**. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n racines de P . Attention ici les racines sont comptées avec leur multiplicité. Elles peuvent donc être identiques entre elles.
Nous avons $P = K(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$
On définit les fonctions élémentaires symétriques des racines :

$$\forall k \text{ avec } 1 \leq k \leq n, \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ \sigma_2 &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n \\ \sigma_3 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n \\ &\dots \\ \sigma_n &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \end{aligned}$$

Exemple

Soit $P = 3(X - 1)(X + 2)(X - 3)$. Les racines sont donc 1, -2 et 3
Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1 - 2 + 3 = 2 \\ \sigma_2 &= -2 + 3 - 6 = -5 \\ \sigma_3 &= -6 \end{aligned}$$

Théorème

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme **scindé** de $\mathbb{K}[X]$. Soit $P = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$ sa forme factorisée.

Nous avons : $\forall k \text{ avec } 1 \leq k \leq n, \sigma_k (-1)^k a_n = a_{n-k}$.

Cette formule est appelée **Formule de Viète**

Preuve

$$P = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n) = a_n [X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n]$$

Une simple identification avec $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ nous donne le résultat.

Exemple

Reprenons l'exemple $P = 3(X - 1)(X + 2)(X - 3)$. $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = -5, \sigma_3 = -6$
Nous avons :

$$\begin{aligned} -\sigma_1 * 3 &= a_2 \\ a_2 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 * 3 &= a_1 \\ a_1 &= -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sigma_3 * 3 &= a_0 \\ a_0 &= 18 \end{aligned}$$

Cela nous amène à $P = 3X^3 - 6X^2 - 15X + 18$

Exercice

Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$

Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Solution

Scindons le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Il vient $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$ avec α_1, α_2 et α_3 les trois racines dans $\mathbb{C}$ de P
Cela nous donne :

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -8$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = 23$$

$$-\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -28$$

$\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1$ donc $2\alpha_1 = 8 \Rightarrow \alpha_1 = 4$. Il nous vient :

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 4$$

$$4\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = 23$$

$$\begin{aligned} 4\alpha_2 \alpha_3 &= 28 \\ \alpha_2 \alpha_3 &= 7 \end{aligned}$$

α_2 et α_3 sont donc solutions de $X^2 - 4X + 7$. $\Delta = 16 - 28 = -12$. $\alpha_2 = \frac{4+i\sqrt{12}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$ et $\alpha_3 = \frac{4-i\sqrt{12}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$