Fractions rationnelles.

Décomposons dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $R = \frac{X^4+1}{X^3-1}$

Solution

Le polynôme $X^3 - 1$ peut se factoriser ainsi : $(X-1)(X-j)(X-j^2)$. $1, j, j^2$ étant les racines 3 ièmes de l'unité.
La division euclidienne de X^4+1 par X^3-1 nous donne $E(X) = X$
Il vient $R = \frac{X^4+1}{X^3-1} = \frac{X^4+1}{(X-1)(X-j)(X-j^2)} = X + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}$ $(*)$

Multiplions cette égalité $(*)$ par $(X-1)$: $\frac{X^4+1}{(X-j)(X-j^2)} = X(X-1) + a + \frac{b(X-1)}{X-j} + \frac{c(X-1)}{X-j^2}$
Evaluons cette expression en $X = 1$:

$$\frac{2}{(1-j)(1-j^2)} = a$$

Nous savons que $1 + j + j^2 = 0$; $a = \frac{2}{1-j^2-j+1} = \frac{2}{3}$

Multiplions cette égalité $(*)$ par $(X-j)$: $\frac{X^4+1}{(X-1)(X-j^2)} = X(X-j) + \frac{a(X-j)}{X-1} + b + \frac{c(X-j)}{X-j^2}$
Evaluons cette expression en $X = j$:

$$\frac{1+j}{(j-1)(j-j^2)} = b$$

Nous savons que $1 + j + j^2 = 0$; $b = \frac{-j^2}{j^2-1-j+j^2} = -\frac{j^2}{3j^2} = -\frac{1}{3}$

Multiplions cette égalité $(*)$ par $(X-j^2)$: $\frac{X^4+1}{(X-1)(X-j)} = X(X-j^2) + \frac{a(X-j^2)}{X-1} + \frac{b(X-j^2)}{X-j} + c$
Evaluons cette expression en $X = j^2$:

$$\frac{1+j^2}{(j^2-1)(j^2-j)} = c$$

Nous savons que $1 + j + j^2 = 0$; $c = \frac{-j}{j-1-j^2+j} = -\frac{j}{3j} = -\frac{1}{3}$

En résumé : $\frac{X^4+1}{(X-j)(X-j^2)} = X + \frac{2}{3} * \frac{1}{X-1} - \frac{1}{3} * \frac{1}{X-j} - \frac{1}{3} * \frac{1}{X-j^2}$

Décomposons dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $R = \frac{4}{(X^2-1)^2}$

Solution

$$R = \frac{4}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} \text{ (En effet } E(R) = 0)$$

Multiplions cette relation par $(X-1)^2$ et évaluons la en $X = 1$ il vient :

$$\frac{4}{4} = b \Rightarrow b = 1$$

Multiplions cette relation par $(X+1)^2$ et évaluons la en $X = -1$ il vient :

$$\frac{4}{4} = d \Rightarrow d = 1$$

R peut être vue dans $\mathbb{R}(X)$ comme une fonction paire.

$$R(-X) = R(X) \Rightarrow \frac{a}{-X-1} + \frac{1}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{1}{(-X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}$$

L'unicité la décomposition nous donne $a = -c$
Evaluons maintenant R en 0 : $4 = \frac{a}{-1} + 1 - a + 1 \Rightarrow a = -1$ et $c = 1$

Donc $R = \frac{4}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}$

Décomposons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $R = \frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2}$

Solution

$$R = \frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}$$

Multiplions cette relation par X et évaluons la en $X = 0$ il vient :

$$a = \frac{1}{-1} = -1$$

Multiplions cette relation par $X-1$ et évaluons la en $X = 1$ il vient :

$$b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Multiplions cette relation par X et déterminons la limite à droite et à gauche en $+\infty$. Il vient :
$0 = a + b + c \Rightarrow 0 = -1 + \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

Multiplions cette relation par $(X^2+1)^2$ et évaluons la en i . Il vient
$\frac{-i+1}{i(i-1)} = ei + f \Rightarrow -\frac{1}{i} = ei + f \Rightarrow i = ei + f \Rightarrow e = 1$ et $f = 0$ (e et f réels)

A ce stade nous avons : $\frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{2} * \frac{1}{X-1} + \frac{\frac{1}{2}X+d}{(X^2+1)} + \frac{X}{(X^2+1)^2}$

Une évaluation en $X = 2$ nous donne $\frac{9}{50} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1+d}{5} + \frac{2}{25} \Rightarrow \frac{d}{5} = \frac{9}{50} - \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = -\frac{5}{50} \Rightarrow d = -\frac{25}{50} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{2} * \frac{1}{X-1} + \frac{1}{2} * \frac{X-1}{(X^2+1)} + \frac{X}{(X^2+1)^2}$$

Décomposons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $R = \frac{X+1}{X^4+1}$

Solution

Il nous faut avant toute chose factoriser le polynôme X^4+1 en éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Placons nous dans $\mathbb{C}[X]$

$$X^4 + 1 = 0 \Rightarrow X^4 = -1 \Rightarrow X^4 = e^{i\pi} \Rightarrow X \in \left\{ e^{\frac{i\pi}{4}};\ e^{\frac{3\pi}{4}}; -e^{\frac{i\pi}{4}}; -e^{\frac{3\pi}{4}} \right\}$$

$$X^4 + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)$$

$$X^4 + 1 = \left[X^2 + X\left(e^{\frac{i3\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) + 1\right]\left[X^2 + X\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{i3\pi}{4}}\right) + 1\right] = (X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1)(X^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1)$$

$$X^4 + 1 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

Nous avons donc $R = \frac{X+1}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$

Multiplier cette relation par X à droite et à gauche puis prendre la limite en $+\infty$ nous donne $a + c = 0 \Rightarrow a = -c$
Evaluer cette expression en 0 nous donne $1 = b + d$
Evaluer cette expression en $\sqrt{2}$ nous donne $\frac{1+\sqrt{2}}{5} = \frac{a\sqrt{2}+b}{1} + \frac{c\sqrt{2}+d}{5} \Rightarrow 1 + \sqrt{2} = 5a\sqrt{2} + 5b + c\sqrt{2} + d$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{2} = 4a\sqrt{2} + 4b + 1 \Rightarrow \sqrt{2} = 4a\sqrt{2} + 4b\ (*)$$

Evaluer cette expression en $-\sqrt{2}$ nous donne $\frac{1-\sqrt{2}}{5} = \frac{-a\sqrt{2}+b}{5} + \frac{-c\sqrt{2}+d}{1} \Rightarrow 1 - \sqrt{2} = -a\sqrt{2} + b - 5c\sqrt{2} + 5d$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2} = 4a\sqrt{2} - 4b + 5 \Rightarrow -\sqrt{2} = 4a\sqrt{2} - 4b + 4\ (**)$$

En combinant $(*)$ et $(**)$ il vient $0 = 8a\sqrt{2} + 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{8\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$4b = \sqrt{2} - 4a\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

En résumé $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$; $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $d = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

Autre méthode : Partons du résultat précédent : $\frac{X+1}{X^4+1}=\frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$

$$\frac{X+1}{X^4+1}=\frac{(aX+b)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)+(cX+d)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}{(X^4+1)}$$
$$\frac{X+1}{X^4+1}=\frac{(a+c)X^3+X^2\left(b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}\right)+X\left(a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2}\right)+b+d}{(X^4+1)}$$

Il vient $(a+c)X^3+X^2\left(b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}\right)+X\left(a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2}\right)+b+d=1+X$

Cela nous donne par identification :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}=0 \\ a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2}=1 \\ b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ a\sqrt{2}+a\sqrt{2}=-1 \\ b\sqrt{2}-(1-b)\sqrt{2}=1 \\ b=1-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ a=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ 2b\sqrt{2}-\sqrt{2}=1 \\ b=1-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ a=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ d=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Nous retombons bien sur les mêmes résultats que dans la première méthode.