Fractions rationnelles.

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Notation	Soit $R = \mathbb{K}[X]\text{x}(\mathbb{K}[X]-\{0\})$. Nous noterons tout élément de R : $\frac{A}{B}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in (\mathbb{K}[X]-\{0\})$
Définition	Sur R nous introduisons une relation notée "$\sim$" et définie par $\frac{A}{B}\sim\frac{A'}{B'}\ ssi\ AB' = BA'$
Propriété	La relation "$\sim$" est sur R une relation d'équivalence.

Preuve

- "$\sim$" est évidemment réflexive $\frac{A}{B}\sim\frac{A}{B}$
- "$\sim$" est évidemment symétrique $\frac{A}{B}\sim\frac{C}{D}\ ssi\ AD = BC\ ssi\ \frac{C}{D}\sim\frac{A}{B}$
- "$\sim$" est évidemment transitive. Si $\frac{A}{B}\sim\frac{C}{D}$ et $\frac{C}{D}\sim\frac{E}{F}$ alors $AD = BC$ et $CF = ED \Rightarrow BCF = BED \Rightarrow ADF = BED \Rightarrow AF = BE$ car $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Or $AF = BE \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{E}{F}$

Définition	L'ensemble des classes d'équivalence de R par rapport à "$\sim$" ou plus simplement R quotienté par "$\sim$" est noté $\mathbb{K}(X)$ et se nomme l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$.
Exemple	$\frac{1}{X-i}\ et\ \frac{X+i}{X^2+1}$ désignent la même fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$
Remarque	A l'avenir nous ne dirons plus que $\frac{1}{X-i}\sim\frac{X+i}{X^2+1}$ mais nous noterons $\frac{1}{X-i} = \frac{X+i}{X^2+1}$
Propriété	On munit $\mathbb{K}(X)$ de deux opération " + " et " $*$ " qui lui confèrent une structure de **corps**. " + " est définie par $\frac{A}{B}+\frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$ et " $*$ " est définie par $\frac{A}{B}*\frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

Preuve. Si la construction de $\mathbb{K}(X)$ elle ne présente pas de difficulté majeure. Je la laisse donc à la disponibilité du lecteur.

- Il faut d'abord vérifier que ces deux opération ont un sens, c'est-à-dire sont compatibles avec la relation "$\sim$"
  Je m'explique : si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ a-t-on $\frac{A}{B}+\frac{P}{Q} = \frac{C}{D}+\frac{R}{S}$ ou encore $\frac{A}{B}*\frac{P}{Q} = \frac{C}{D}*\frac{R}{S}$?

  $\frac{A}{B}+\frac{P}{Q} = \frac{(AQ+BP)}{BQ}$ et $\frac{C}{D}+\frac{R}{S} = \frac{CS+RD}{DS}$; $(AQ+BP)DS = ADQS + PSBD$ Or $AD = BC$ et $PS = RQ$
  Donc $(AQ+BP)DS = BCQS + RQBD = BQ(CS+RD)$ donc $\frac{A}{B}+\frac{P}{Q} = \frac{C}{D}+\frac{R}{S}$
  De même $\frac{A}{B}*\frac{P}{Q} = \frac{AP}{BQ}$ et $\frac{C}{D}*\frac{R}{S} = \frac{CR}{DS}$; $APDS = ADPS = BCPS = BCRQ = BQCR$ donc $\frac{AP}{BQ} = \frac{CR}{DS}$
  Ces deux opérations sont donc compatibles avec la relation "$\sim$"
- " + " est une loi de composition interne commutative.
  " + " est associative. $\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+\frac{E}{F} = \frac{(AD+BC)}{BD}+\frac{E}{F} = \frac{F(AD+BC)+EBD}{BDF} = \frac{FAD+FBC+EBD}{BDF}$ et $\frac{A}{B}+\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B}+\frac{CF+DE}{DF} = \frac{ADF+BCF+BDE}{BDF} = \left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+\frac{E}{F}$
- La loi « + » admet un élément neutre : $\frac{0}{1}$.
  Tout élément de $\mathbb{K}(X)$ admet un inverse pour la loi " + " : son inverse. $\frac{A}{B}+\frac{-A}{B} = 0$
  A ce stade nous pouvons donc dire que $(\mathbb{K}(X),+)$ **est un groupe abélien**
- La loi « $*$ » est une loi de composition interne commutative pour $\mathbb{K}(X)$. Elle est dotée d'un élément neutre : $\frac{1}{1}$
  Cette loi est associative :
  $$\frac{A}{B}*\left(\frac{C}{D}*\frac{E}{F}\right) = \left(\frac{A}{B}*\frac{C}{D}\right)*\frac{E}{F}$$
  et distributive par rapport à l'addition : $\frac{A}{B}*\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B}*\left(\frac{CF+DE}{DF}\right) = \frac{ACF+ADE}{BDF}$; $\frac{A}{B}*\frac{C}{D}+\frac{A}{B}*\frac{E}{F} = \frac{AC}{BD}+\frac{AE}{BF} = \frac{ACBF+BDAE}{BDBF} = \frac{ACF+DAE}{BDF} = \frac{A}{B}*\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)$
  Tout élément de $\mathbb{K}(X)$ non nul, de la forme $\frac{A}{B}$ admet un inverse : $\frac{B}{A}$
  Maintenant nous pouvons affirmer que $(\mathbb{K}(X),+,*)$ est un corps commutatif

Propriété	Tout élément de $\mathbb{K}(X)$ peut se mettre sous forme irréductible. C'est-à-dire sous la forme $\frac{A}{B}$ avec $A \wedge B = 1$

Preuve

Soit $R = \frac{A}{B}$ un élément de $\mathbb{K}(X)$. $A = (A \wedge B)A'$ et $B = (A \wedge B)B'$ avec $A' \wedge B' = 1$

Donc $R = \frac{A}{B} = \frac{(A \wedge B)A'}{(A \wedge B)B'} = \frac{A'}{B'}$ avec $A' \wedge B' = 1$

Exemple	$\frac{1}{X-i}$ est la forme irréductible de $\frac{X+i}{X^2+1}$