Fractions rationnelles.

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Propriété	Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. $R = \frac{A}{B}$ avec A et B dans $\mathbb{K}[X]$. La quantité $\deg(A) - \deg(B)$ ne dépend que de R et non de son représentant.

Preuve

Soit $R = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; A, B, C et D étant tous des éléments de $\mathbb{K}[X]$.
Nous avons $AD = CB \Rightarrow \deg(A) + \deg(D) = \deg(C) + \deg(B) \Rightarrow \deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D)$

Définition	Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. $R = \frac{A}{B}$ avec A et B dans $\mathbb{K}[X]$. La quantité $\deg(A) - \deg(B)$ est appelée degré de la fraction rationnelle R et est notée $\deg(R)$
Exemple	Soit $R = \frac{(X-1)^3}{(X-i)^2(X+i)}$. $\deg(R) = 3 - 3 = 0$
Remarque	Le degré d'une fraction rationnelle peut donc être soit un entier relatif soit $-\infty$
Propriété	Soient R et S deux éléments de $\mathbb{K}(X)$. Les propriétés du degré valables avec les polynômes restent valables avec les fractions rationnelles. A savoir : $\deg(R+S) \leq \max(\deg R, \deg S)$; $\deg(RS) = \deg(R) + \deg(S)$

Preuve

Posons $R = \frac{A}{B}$ et $S = \frac{C}{D}$ avec A, B, C, D dans $\mathbb{K}[X]$

- $\deg(R+S) = \deg\left(\frac{AD+BC}{BD}\right) = \deg(AD+BC) - \deg(BD) \leq \max(\deg(A)+\deg(D) ; \deg(B)+\deg(C)) - \deg(B) - \deg(D) \leq \max(\deg(A)-\deg(B) ; \deg(C)-\deg(D)) \leq \max(\deg(R) ; \deg(S))$
- $\deg(RS) = \deg\left(\frac{AC}{BD}\right) = \deg(A) + \deg(C) - \deg(B) - \deg(D) = \deg\left(\frac{A}{B}\right) + \deg\left(\frac{C}{D}\right)$

Définition	Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. R est mis sous forme irréductible. $R = \frac{A}{B}$ avec A et B dans $\mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$ et $A \wedge B = 1$. Soient α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. • α est dit zéro de R de multiplicité n lorsque α est racine de A de multiplicité n • β est dit pôle de R de multiplicité p lorsque α est racine de A de multiplicité p
Exemple	$R = \frac{(X-1)^3}{(X-i)^2(X+i)}$ admet 1 comme zéro de multiplicité $3, i$ comme pôle de multiplicité 2 et $-i$ comme pôle de multiplicité $-i$
Théorème	Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme P et une unique fraction rationnelle S avec $\deg(S) < 0$ tels que $R = P + S$. P est appelé la partie entière de R et on la note $E(R)$

Preuve

- Existence : Soit $R = \frac{A}{B}$ avec A et B dans $\mathbb{K}[X]$. Réalisons la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{K}[X]$.
  Nous avons $A = QB + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.
  Il vient $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$; Q est bien un polynôme et $\frac{R}{B}$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif.
- Unicité : Supposons $R = P + S = P' + S'$ avec $\deg(S)$ et $\deg(S')$ deux fractions rationnelles de degré négatif.
  Il vient $P - P' = S' - S$. A gauche un polynôme. A droite une fraction rationnelle de degré strictement négatif.
  Cela n'est possible que si $P = P'$ et $S = S'$. On a alors $\deg(P - P') = \deg(S' - S) = -\infty$. L'unicité est ainsi démontrée.

Exemple	Soit $R = \frac{A}{B} = \frac{2X^4+3X^3-X+1}{X^2-3X+1}$; La division euclidienne de A par B donne $2X^4 + 3X^3 - X + 1 = (X^2 - 3X + 1)(2X^2 + 9X + 25) + 65X - 24$ On a donc $R = 2X^2 + 9X + 25 + \frac{65X-24}{X^2-3X+1}$; La partie entière de R est donc $2X^2 + 9X + 25$

Théorème — **Décomposition d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$**

Soit R une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ possédant n poles distincts $\alpha_1, \dots \alpha_n$ de multiplicité $m_1, \dots m_n$
Il existe une famille de complexes unique $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m_i}}$ telle que :

$$R = E(R) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}$$

Preuve — Hors programme

Exemple — Une fiche complète de décompositions dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ a été réalisée dans ce chapitre

Théorème — **Décomposition d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$**

Soit R une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ s'écrivant $R = \frac{A}{(X-\alpha_1)^{m_1}\dots(X-\alpha_n)^{m_n}(X^2-\beta_1X+\gamma_1)^{p_1}\dots(X^2-\beta_kX+\gamma_k)^{p_k}}$

A étant un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ premier avec le dénominateur de R et les polynômes de la forme $X^2 - \beta_iX+\gamma_i$ étant tous de discriminant négatif. En d'autres termes le dénominateur de R a été décomposé en éléments irréductibles.

Il existe trois familles de réels uniques $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m_i}}$, $(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le p_i}}$, $(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le p_i}}$ et telle que :

$$R = E(R) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i}\frac{b_{i,j}X+c_{i,j}}{(X^2-\beta_iX+\gamma_i)^j}$$

Preuve — Hors programme

Exemple — Une fiche complète de décompositions dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ a été réalisée dans ce chapitre

Remarque — Décomposer une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ en éléments simples permet d'en déterminer aisément une primitive et ainsi de calculer des intégrales.

Propriété

Soit $F = \frac{A}{B}$ avec $F \in \mathbb{K}(X)$ et A et B dans $\mathbb{K}[X]$. Soit α un pôle de multiplicité 1 de F.
Dans la décomposition en éléments simples de F apparaitra donc un terme en $\frac{a}{X-\alpha}$ avec $a \in \mathbb{K}$. C'est la partie polaire associée à α

On a alors $a = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$

Preuve

α est un pôle de multiplicité 1 de $F = \frac{A}{B}$. Donc $B = (X-\alpha)C$ avec $C(\alpha) \neq 0$
Décomposons en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, F. Nous avons :

$\frac{A}{(X-\alpha)C} = E(F) + \frac{a}{X-\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}$; Les α_i désignant les pôles de F autres que α

Il vient $\frac{A}{C} = a + (X-\alpha)\left[E(F) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}\right]$. Il vient $a = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}$

De la relation $B = (X-\alpha)C$ nous tirons $B' = (X-\alpha)C' + C$ donc $B'(\alpha) = C(\alpha)$. Nous avons bien $a = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$
Bien entendu si nous avions décomposé dans $\mathbb{R}(X)$ nous aurions obtenu exactement le même résultat

Exemple

Soient les $\alpha_{i\,(1\le i\le n)}$ les n racines n-ièmes de l'unité.
Nous avons dans $\mathbb{C}(X)$, $X^n - 1 = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$. Chaque α_i est donc un pôle de multiplicité 1 de $\frac{1}{X^n-1}$
Nous avons donc $\mathbb{C}(X)$, $\frac{1}{X^n-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{X-\alpha_i}$

En posant $\frac{A}{B} = \frac{1}{X^n-1}$ nous avons d'après la propriété précédente $a_i = \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)} = \frac{1}{n{\alpha_i}^{n-1}}$
Nous avons donc $\frac{1}{X^n-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n{\alpha_i}^{n-1}} * \frac{1}{X-\alpha_i} = \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} * \frac{\alpha_i}{X-\alpha_i}}$

Propriété	Soit P un polynôme de $\mathbb{C}(X)$. On note $\alpha_1, \dots \alpha_n$ ses n racines distinctes de multiplicité $m_1, \dots m_n$ Alors $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{X-\alpha_i}$

Preuve

Si α_i est une racine de P de multiplicité m_i alors α_i est une racine de P' de multiplicité $m_i - 1$.
Il vient α_i pôle de multiplicité 1 de $\frac{P'}{P}$
Nous avons donc de $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X-\alpha_i}$; Chaque a_i étant un nombre complexe.
Multiplions cette égalité par $X - \alpha_i$

$$\frac{P'}{P}(X-\alpha_i) = a_i + (X-\alpha_i)\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_j}{X-\alpha_j} \; ; \; (*)$$

Nous savons que $P = (X-\alpha_i)^{m_i}R$ avec $R(\alpha_i) \neq 0$ et $P' = (X-\alpha_i)^{m_i-1}Q$ avec $Q(\alpha_i) \neq 0$ donc

$$\frac{P'}{P}(X-\alpha_i) = \frac{Q}{R}$$

Ce qui implique en évaluant $(*)$ en α_i, $\boldsymbol{a_i = \frac{Q(\alpha_i)}{R(\alpha_i)}}$.

De l'expression $P = (X-\alpha_i)^{m_i}R$ nous tirons $P' = m_i(X-\alpha_i)^{m_i-1}R + (X-\alpha_i)^{m_i}R' = (X-\alpha_i)^{m_i-1}Q$
Il vient $m_iR + (X-\alpha_i)R' = Q$ ce qui évalué en α_i nous donne $m_iR(\alpha_i) = Q(\alpha_i) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{Q(\alpha_i)}{R(\alpha_i)} = m_i}$

Nous avons bien $\boldsymbol{a_i = m_i}$ et donc $\boldsymbol{\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{X-\alpha_i}}$