Fractions rationnelles

Dans ce chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels.

Définition

On définit sur $\mathbb{K}(X)$ l'opération dérivation de la manière suivante. Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ avec $R = \frac{A}{B}$
Alors $R' = \frac{A'B-B'A}{B^2}$; A' et B' désignant les dérivées des polynômes A et B dans $\mathbb{K}[X]$ que nous avons déjà abordé.

Remarque

Nous pouvons remarquer que cette opération ne dépend pas du représentant choisi pour représenter R.
En effet supposons $R = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; Nous avons $AD = CB$ ce qui implique :

$$A'D + AD' = C'B + CB' \Rightarrow \frac{A'}{B} + \frac{AD'}{BD} = \frac{C'}{D} + \frac{CB'}{BD} \text{ (on divise les deux membres par } BD\text{)}$$

$\frac{A'B-B'A}{B^2} = \frac{A'}{B} - \frac{B'A}{B^2}$; $\frac{C'D-CD'}{D^2} = \frac{C'}{D} - \frac{CD'}{D^2}$; $\frac{A'B-B'A}{B^2} - \frac{C'D-CD'}{D^2} = \frac{A'}{B} - \frac{C'}{D} + \frac{CD'}{D^2} - \frac{B'A}{B^2}$.
Or d'après $(*)$ $\frac{A'}{B} - \frac{C'}{D} = \frac{CB'}{BD} - \frac{AD'}{BD}$
Donc $\frac{A'B-B'A}{B^2} - \frac{C'D-CD'}{D^2} = \frac{CB'}{BD} - \frac{AD'}{BD} + \frac{CD'}{D^2} - \frac{B'A}{B^2} .= \frac{B'}{B}\left(\frac{C}{D} - \frac{A}{B}\right) + \frac{D'}{D}\left(\frac{C}{D} - \frac{A}{B}\right) = 0$ Donc $\frac{A'B-B'A}{B^2} = \frac{C'D-CD'}{D^2}$
La dérivée de R ne dépend pas de son représentant.

Propriété

Les propriétés de la dérivation vues dans $\mathbb{K}[X]$ sont maintenues dans $\mathbb{K}(X)$
A savoir si $(R, S) \in (\mathbb{K}(X))^2$

$(R+S)' = R' + S'$	$(RS)' = R'S + RS'$	Si $S \neq 0$ $\left(\frac{1}{S}\right)' = -\frac{S'}{S^2}$	Si $S \neq 0$ $\left(\frac{R}{S}\right)' = \frac{R'S-RS'}{S^2}$

Preuve

Posons $R = \frac{A}{B}$ et $S = \frac{C}{D}$ avec A, B, C et D dans $\mathbb{K}[X]$

- $R' + S' = \frac{A'B-B'A}{B^2} + \frac{C'D-CD'}{D^2} = \frac{D^2(A'B-B'A)+B^2(C'D-CD')}{B^2D^2}$

$$\begin{aligned}(R+S)' &= \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right)' = \left(\frac{AD+BC}{BD}\right)' = \frac{(AD+BC)'BD - (BD)'(AD+BC)}{(BD)^2} \\ &= \frac{(A'D + D'A + B'C + BC')BD - (B'D + BD')(AD+BC)}{(BD)^2} \\ &= \frac{A'DBD + D'ABD + B'CBD + BC'BD - B'DAD - B'DBC - BD'AD - BD'BC}{(BD)^2} \\ &= \frac{A'DBD + BC'BD - B'DAD - BD'BC}{(BD)^2} = \frac{D^2(A'B - B'A) + B^2(C'D - CD')}{B^2D^2} = R' + S'\end{aligned}$$

- $(RS)' = \left(\frac{AC}{BD}\right)' = \frac{(AC)'BD - AC(BD)'}{(BD)^2} = \frac{(A'C+AC')BD - AC(B'D+BD')}{(BD)^2} = \frac{A'CBD + AC'BD - ACB'D - ACBD'}{(BD)^2}$

$$R'S + RS' = \left(\frac{A'B - B'A}{B^2}\right)\frac{C}{D} + \frac{A}{B}\left(\frac{C'D - CD'}{D^2}\right) = \frac{CA'B - CB'A}{DB^2} + \frac{AC'D - ACD'}{BD^2} = \frac{DCA'B - DCB'A + ABC'D - ACBD'}{(BD)^2} = (RS)'$$

- $\left(\frac{1}{S}\right)' = \left(\frac{D}{C}\right)' = \frac{D'C - C'D}{C^2}$; $-\frac{S'}{S^2} = -\frac{C'D - CD'}{D^2} * \frac{D^2}{C^2} = \frac{D'C - C'D}{C^2} = \left(\frac{1}{S}\right)'$
- $\left(\frac{R}{S}\right)' = (R * \frac{1}{S})' = \frac{R'}{S} + R(\frac{1}{S})' = \frac{R'}{S} - \frac{RS'}{S^2} = \frac{R'S - RS'}{S^2}$