

O

Définition	Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle E . Soit a adhérent à E . On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un voisinage de a : V_a et une fonction h définie sur $V_a \cap E$ telle que : $\forall x \in V_a \cap E, f = gh$ avec h bornée sur $V_a \cap E$. On note alors $f \underset{a}{\underset{\sim}{O}}(g)$
Exemple	Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 5x + x$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\underset{\sim}{O}}(x^2)$ En effet $f(x) = x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{x}{x^2}\right)$. Or la fonction g définie par $g(x) = \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{x}{x^2}\right)$ est une fonction bornée au voisinage de $+\infty$
Remarque	Reprenons les termes de la définition ci-dessus. Lorsque la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de a alors on a $f \underset{a}{\underset{\sim}{O}}(g)$ ssi la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a
Définition	Cette définition se traduit aussi dans le monde des suites. Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies sur \mathbb{N} . On dit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un rang N tel qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $U_n = \varepsilon_n V_n$ avec ε_n suite bornée.
Exemple	Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = 5n^2 + 2n + 1$. On a $U_n = O(n^2)$ car $U_n = n^2 \left(5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ et la suite V_n définie par $V_n = 5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ est bornée dans un voisinage de $+\infty$
Propriété	Soient f, g, h, i quatre fonctions et λ un réel. Nous supposons ici que les o sont pris en a adhérent à l'ensemble de définition de ces fonctions. <ol style="list-style-type: none"> 1. Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ alors $f = O(h)$ (Transitivité) 2. Si $f = O(h)$ et $g = O(h)$ alors $f + g = O(h)$ 3. Si $f = O(h)$ et $g = O(i)$ alors $fg = O(hi)$ 4. Si $f = O(h)$ alors $gf = O(gh)$ 5. Si $f = O(h)$ alors $\lambda f = O(h)$

Preuve

Les preuves sont évidentes et se déclinent à partir des preuves élaborées dans le cadre des o .