

Equivalents	
Définition	Soit E une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et soit a un point adhérent à E . La définition de la négligeabilité peut se décliner de deux manières selon si l'on est dans le monde continu ou le monde discret. Soient f et g deux fonctions définies sur E . On dit que f est équivalente par rapport à g au voisinage de a lorsque $f - g \underset{a}{\underset{\sim}{=}} o(g)$. On note alors $f \sim g$ au voisinage de a
Exemple	Soit $P(x) = x^3 - x^2$. On a $P(x) \sim x^3$ au voisinage de $+\infty$. En effet $x^2 = o(x^3)$. Donc $P(x) = x^3 + o(x^3)$
Remarque	Reprenons le cadre de la définition précédente. Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a nous avons $f \sim g$ ssi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. En effet $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ssi $\frac{f}{g} \underset{a}{\underset{\sim}{=}} 1 + o(1)$ ssi $f \underset{a}{\underset{\sim}{=}} g + o(g)$
Définition	La notion d'équivalent existe aussi dans le monde discret. Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On dit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $U_n \sim V_n$ ssi $U_n - V_n = o(V_n)$
Exemple	Soit $U_n = n^3 - n^2$. On a $U_n \sim n^3$ pour les mêmes raisons explicitées plus haut.
Propriété	La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Preuve

- Elle est réflexive. $U_n \sim U_n$. En effet $U_n - U_n = o(U_n)$
- Elle est symétrique. $U_n \sim V_n \Rightarrow U_n - V_n = o(V_n) \Rightarrow U_n - V_n = \varepsilon_n V_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow U_n = V_n(1 + \varepsilon_n) \Rightarrow V_n = \frac{U_n}{1 + \varepsilon_n}$
Or $\frac{1}{1 + \varepsilon_n} = 1 - \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$. En effet $\frac{1}{1 + \varepsilon_n} - (1 - \varepsilon_n) = \frac{1}{1 + \varepsilon_n} - \frac{(1 - \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_n)}{1 + \varepsilon_n} = \frac{1 - (1 - \varepsilon_n^2)}{1 + \varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{1 + \varepsilon_n} = \varepsilon_n \left(\frac{\varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n} \right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n} = 0$. Donc $V_n = U_n(1 - \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)) = U_n - \varepsilon_n U_n + o(U_n \varepsilon_n)$. Or $o(U_n \varepsilon_n) = o(U_n)$ car $\varepsilon_n \rightarrow 0$
Donc $V_n = U_n - \varepsilon_n U_n + o(U_n) \Rightarrow V_n - U_n = -\varepsilon_n U_n + o(U_n) \Rightarrow V_n - U_n = o(U_n) \Rightarrow V_n \sim U_n$
- Elle est transitive. $U_n \sim V_n \Rightarrow U_n - V_n = o(V_n)$. $V_n \sim W_n \Rightarrow V_n - W_n = o(W_n)$
Donc $U_n = V_n + o(V_n) \Rightarrow U_n - V_n = \varepsilon_n V_n \Rightarrow U_n = (1 + \varepsilon_n)V_n$. $V_n = (1 + \varepsilon'_n)W_n$ donc
 $U_n = (1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon'_n)W_n = W_n + W_n(\varepsilon + \varepsilon'_n + \varepsilon'_n \varepsilon_n)$. Donc $U_n \sim W_n$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n + \varepsilon'_n + \varepsilon'_n \varepsilon_n) = 0$

Propriété Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ (avec $l \neq 0$) $\Leftrightarrow U_n \sim l$ (avec $l \neq 0$)

Preuve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \Leftrightarrow U_n - l = o(1) \Leftrightarrow U_n - l = o(l) \text{ (car } l \neq 0) \Leftrightarrow U_n \sim l$$

Remarque La notion d'équivalent et de limite coïncident donc pour une suite lorsque la limite est réelle et non nulle.

Equivalents en 0

Propriétés

$\ln(1+x) \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$\sin x \sim x$	$\tan x \sim x$
-------------------	------------------	-----------------	-----------------

Preuve

- Soit $\varphi(x) = \ln(1+x)$. $\varphi'(0) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x$
- Soit $\varphi(x) = e^x$. $\varphi'(0) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x$
- Soit $\varphi(x) = \sin x$. $\varphi'(0) = 1$ Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x$
- Soit $\varphi(x) = \tan x$. $\varphi'(0) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan 0}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \Rightarrow \tan x \sim x$

Propriétés	Soient f, g, h, i quatre fonctions définies sur un ensemble E. Soit $a \in \bar{E}$ et au voisinage de $a : f \sim g$ et $h \sim i$ - Alors $fh \sim gi$ - Si f et g ne s'annulent pas dans un voisinage de a alors $\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$ - Si $g > 0$ dans un voisinage de a alors $f > 0$ dans un voisinage de a - Si g est strictement positive au voisinage de a alors $f^\alpha \sim g^\alpha$ pour tout α réel. - Soit $b \in \mathbb{R}$. Soit φ tel que $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$. Alors au voisinage de $b : f \circ \varphi \sim g \circ \varphi$ - Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$ et φ une fonctions strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$
Preuve	
$f \sim g \Rightarrow f = g + o(g)$. $h \sim i \Rightarrow h = i + o(i)$; $fh = (g + o(g))(i + o(i)) = gi + io(g) + go(i) + o(g)o(i) = gi + o(gi) + o(gi) + o(gi) = gi + o(gi)$ $\frac{1}{f} = \frac{g}{f} \cdot \frac{1}{g}$. Or : $f \sim g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$ $f = \frac{f}{g} * g$. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $\forall \varepsilon > 0 \exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \frac{f(x)}{g(x)} > 1 - \varepsilon$ (avec ε aussi petit que désiré) . $g > 0$ dans un voisinage de a donc $\exists V_a'$ tel que $\forall x \in V_a' g(x) > 0$. Il vient $\forall x \in V_a' \cap V_a f(x) > 0$ $\frac{f^\alpha}{g^\alpha} = \left(\frac{f}{g}\right)^\alpha$. Nous savons que $\exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a, f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ $\forall x \in V_a \left(\frac{f}{g}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(\frac{f}{g}\right)}$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} e^{\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)} = 1. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^\alpha}{g^\alpha} = 1 \Rightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$ - Au voisinage de $a : f \sim g$ donc $f - g = \varepsilon g$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ $f \circ \varphi - g \circ \varphi = (\varepsilon \circ \varphi)(g \circ \varphi)$ Nous avons $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow b} \varepsilon(\varphi(x)) = 0$. Donc au voisinage de b $f \circ \varphi \sim g \circ \varphi$ $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. Donc $u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)} = \varepsilon_{\varphi(n)} v_{\varphi(n)}$ φ étant strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$ nous avons $\forall n \in \mathbb{N} \varphi(n) \geq n$ (simple démonstration par récurrence) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \text{ tel que } \forall n \geq N_0 \varepsilon_n < \varepsilon$ Or si $\forall n \geq N_0 \varepsilon_n < \varepsilon$ alors $\forall n \geq N_0 \varepsilon_{\varphi(n)} < \varepsilon$ (car $\varphi(n) \geq n$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_{\varphi(n)} = 0 \Rightarrow u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$	
Propriété	Soient f, g, h trois fonctions définies sur un ensemble E vérifiant $\forall x \in E f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ Soit $a \in \bar{E}$ et au voisinage de $a : f \sim h$ alors : $g \sim f$
Preuve	
$f \sim h \Rightarrow h(x) = f(x) + \varepsilon(x)f(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$; Nous remarquerons que l'inégalité $f(x) \leq h(x)$ implique que $\forall x \in E, \varepsilon(x)f(x) \geq 0$. Nous avons donc $\forall x \in E f(x) \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon(x)f(x) \Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \leq \varepsilon(x)f(x)$ (*) Posons $g(x) - f(x) = a(x)f(x)$ Dans le cas où $f(x) = 0$ nous avons $g(x) - f(x) = 0$ et nous pouvons poser $a(x) = 0$ Dans le cas où $f(x) \neq 0$ nous avons $a(x) = \frac{g(x)-f(x)}{f(x)}$ De (*) nous déduisons $0 \leq a(x)f(x) \leq \varepsilon(x)f(x)$ donc $a(x)f(x) \leq \varepsilon(x)f(x) \Rightarrow a(x) \leq \varepsilon(x)$ Comme nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ nous avons aussi $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = 0$ ce qui implique $g - f = o(f) \Rightarrow g = f + o(f)$	
Remarques	- Dès propriétés précédentes nous retenons que les équivalents sont compatibles avec la multiplication et la composition à droite. Attention toutefois à ne pas additionner deux équivalents. Cela n'a aucun sens Exemple si $f(x) = x^3 + x$ et $g(x) = -x^3$ Nous avons en $+\infty f(x) \sim x^3$ et $g(x) \sim -x^3$. Par contre $f + g \sim x$ (difficile de le prévoir juste en additionnant les équivalents précédents) - Une fiche entière de calculs d'équivalents est fournie dans ce chapitre. Je vous y donne rendez vous.