| o | |
|---|---|
| **Définition** | Soit $E$ une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $a$ adhérent à $E$. La définition de la négligeabilité peut se décliner de deux manières selon si l'on est dans le monde continu ou le monde discret.<br>Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $E$. On dit que $\boldsymbol{f}$ **est négligeable par rapport à** $\boldsymbol{g}$ **au voisinage de** $\boldsymbol{a}$ lorsqu'il existe un voisinage de $a$ noté $V_a$ et une fonction $\varepsilon$ définie sur $V_a \cap E$ telle que $\forall x \in V_a \cap E$ $f = \varepsilon g$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. On note alors $\boldsymbol{f} \underbrace{=}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{o(g)}$ (en $x = a$). On dit $f$ est un petit o de $g$. |
| **Remarque** | • Lorsque $g$ ne s'annule pas dans dun voisinage de $a$ cela est équivalent de montrer que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . C'est souvent cette méthode qui est la plus utilisée.<br>• $a$ peut être un réel mais peut aussi valoir $\pm\infty$ |
| **Exemple** | Nous avons $x^2 \underbrace{=}_{0} o(x)$ ( en 0 ) et $x \underbrace{=}_{+\infty} o(x^2)$ |
| **Définition** | La définition précédente s'applique aussi dans le cas discret.<br>Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable par rapport à $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un rang $N$ tel qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_n = \varepsilon_n V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.<br>On note alors $\boldsymbol{U_n = o(V_n)}$<br>Là encore si pour $n \geq N$ $V_n \neq 0$ il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$ |
| **Exemple** | $n^2 = o(n^4)$ |
| **Propriétés** | Soient $\alpha, \beta, \gamma$ trois réels strictement positifs.<br>• Au voisinage de $+\infty$<br>Si $\alpha < \beta$ $x^\alpha = o(x^\beta)$ ; $(lnx)^\beta = o(x^\alpha)$ ; $x^\alpha = o(e^{\gamma x})$<br>• Au voisinage de 0.<br>Si $\alpha < \beta$ $x^\beta = o(x^\alpha)$ ; $x^\alpha = o(\lvert\ln x\rvert^\beta)$ |

**Preuve**

C'est la traduction avec des $o$ des croissances comparées que nous avons déjà rencontrées.
Si $\alpha < \beta$ :
$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ avec $\alpha - \beta < 0$ ; $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta} = 0 \Rightarrow x^\alpha = o(x^\beta)$ ; $\frac{x^\beta}{x^\alpha} = x^{\beta-\alpha}$ avec $\beta - \alpha > 0$ ; $\lim_{x\to 0} x^{\beta-\alpha} = 0 \Rightarrow x^\beta = o(x^\alpha)$

Au voisinage de $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^\beta}{x^\alpha} = 0 \Rightarrow (lnx)^\beta = o(x^\alpha)$ ; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0 \Rightarrow x^\alpha = o(e^{\gamma x})$

De même au voisinage de 0
$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{\lvert lnx\rvert^\beta} = 0 \Rightarrow x^\alpha = o(\lvert\ln x\rvert^\beta)$

| | |
|---|---|
| **Exemple** | $x^2 = o(\lvert\ln x\rvert)$ en 0 par contre $\ln x = o(x^2)$ et $x^3 = o(e^{\frac{x}{2}})$ en $+\infty$ |
| **Propriétés** | Soient $f, g, h, i$ quatre fonctions possédant le même ensemble de définition et $\lambda$ un réel. Nous supposerons ici que les $o$ sont pris en $a$ adhérent à l'ensemble de définition de ces fonctions.<br>1. Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$ (Transitivité)<br>2. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ alors $f + g = o(h)$<br>3. Si $f = o(h)$ et $g = o(i)$ alors $fg = o(hi)$<br>4. Si $f = o(h)$ alors $gf = o(gh)$<br>5. Si $f = o(h)$ alors $\lambda f = o(h)$ |

**Preuve**

1. $f = o(g) \Rightarrow f = \varepsilon g$ ; $g = o(h) \Rightarrow g = \varepsilon' h$ ; Donc $f = (\varepsilon\varepsilon')h$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon\varepsilon' = 0$ donc $f = o(h)$
2. $f = o(h) \Rightarrow f = \varepsilon h$ ; $g = o(h) \Rightarrow g = \varepsilon' h$ ; Donc $f + g = (\varepsilon + \varepsilon')h$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon + \varepsilon' = 0$ donc $f + g = o(h)$
3. $f = o(h) \Rightarrow f = \varepsilon h$ ; $g = o(i) \Rightarrow g = \varepsilon' i$ ; Donc $fg = (\varepsilon\varepsilon')(hi)$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon\varepsilon' = 0$ . Donc $fg = o(hi)$
4. $f = o(h) \Rightarrow f = \varepsilon h$ ; Donc $fg = \varepsilon\,(gh)$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon = 0$ Donc $gf = o(gh)$
5. $f = o(h) \Rightarrow f = \varepsilon h$ ; $\lambda f = (\lambda\varepsilon)\, h$ avec $\lim_{x\to a} \lambda\varepsilon = 0$ donc $\lambda f = o(h)$

| | |
|---|---|
| **Propriétés** | Composition à droite.<br>Soient $f, g$ deux fonctions, $a$ appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à leur ensemble de définition, $b$ un autre élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi$ une fonction définie sur un voisinage de $b$ telle que $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$<br>Nous supposerons $f \underbrace{=}_{a} o(g)$. Alors $f o\ \varphi \underbrace{=}_{b} o(go\varphi)$ |
| **Preuve** | |
| $f \underbrace{=}_{a} o(g) \Rightarrow f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. $f o\ \varphi(x) = f\big(\varphi(x)\big) = \varepsilon\big(\varphi(x)\big) g(\varphi(x))\ (*)$.<br>$\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to b} \varepsilon\big(\varphi(x)\big) = 0$. D'après $(*)$ $f o\ \varphi \underbrace{=}_{b} o(go\varphi)$ | |
| **Exemple** | Nous avons $x^2 \underbrace{=}_{+\infty} o(e^x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\lvert x\rvert} = +\infty$ donc $\frac{1}{\lvert x\rvert^2} \underbrace{=}_{0} o(e^{\frac{1}{x}})$ |