Développement limité

Le but d'un développement limité (DL) est de donner une approximation d'une fonction au voisinage d'un point. Par exemple au voisinage de 0 nous avons $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Plusieurs questions se posent ? Toutes les fonctions admettent-elles un DL ? Si une fonction admet un DL, celui-ci est il unique ? Peut-on dériver ou primitiver un développement limité ? Nous allons résponder à toutes ces questions.

Définition	Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $a \in \bar{E}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n autour de a (ou au voisinage de a) si il existe $n+1$ réels $a_0, a_1 \dots a_n$ tels que au voisinage de a, $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
Exemple	Au voisinage de 0 nous avons $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n + o(x^n)$ En effet $1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ Or $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n * \frac{x}{1-x} = o(x^n)$. Nous avons bien $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n + o(x^n)$
Propriété	Si au voisinage de a une fonction f admet un DL alors ce DL est unique.

Preuve

Supposons que au voisinage de a une fonction f admette deux DL distincts :
$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.
Il vient $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x-a) + (a_2 - b_2)(x-a)^2 + \cdots (a_n - b_n)(x-a)^n = o((x-a)^n)$
En particulier $(a_0 - b_0) = o(x-a)$. Cela n'est possible que si $a_0 = b_0$
Soit (a_p, b_p) avec $1 \leq p \leq n$ le premier couple de coefficients non identiques ($a_p \neq b_p$).
Ce couple existe forcément les deux DL étant différents.
Nous avons $(a_p - b_p)(x-a)^p + (a_{p+1} - b_{p+1})(x-a)^{p+1} + \cdots (a_n - b_n)(x-a)^n = o((x-a)^n)$
Ce qui implique $(a_p - b_p) + (a_{p+1} - b_{p+1})(x-a)^1 + \cdots (a_n - b_n)(x-a)^{n-p} = o((x-a)^{n-p})$
Donc $(a_p - b_p) = o((x-a)^{n-p})$. Cela n'est possible que si $a_p = b_p$. Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

Remarque	Connaître le DL d'une fonction f à l'ordre n au voisinage de a permet de connaître un équivalent de f dans ce même voisinage. En effet si au voisinage de a, $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et a_p est le premier coefficient non nul, alors $f(x) \sim a_p(x-a)^p$
Propriété	Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert et $a \in I$ • f est continue en a ssi f admet un DL à l'ordre 0 en a • f est dérivable en a ssi f admet un DL à l'ordre 1 en a

Preuve

- f est continue en a ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + o(1)$ ssi f admet un DL à l'ordre 0 en a
- f est dérivable en a ssi $\lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow$
  $\frac{(f(x)-f(a))}{x-a} = f'(a) + o(1) \Rightarrow f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a) \Rightarrow$ f admet un DL à l'ordre 1 en a
  De même $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a) \Rightarrow$ (pour $x \neq a$) $\frac{(f(x)-f(a))}{x-a} = a_1 + o(1) \Rightarrow$ f est dérivable en a

Exemple	Reprenons l'exemple de la fonction $x \to \frac{1}{1-x}$ vu plus haut. Cette fonction admet un DL à l'ordre 1 en 0. Cela siginifie qu'elle est dérivable en 0. Mais nous le savions déjà ….
Propriété	Soit f une fonction définie sur un ensemble E symétrique par rapport à l'origine. $0 \in \bar{E}$. On suppose que f admet un DL à l'ordre n en 0 • Si f est paire alors tous les coefficients de son DL d'ordre impair sont nuls. • Si f est impaire alors tous les coefficients de son DL d'ordre pair sont nuls.

Preuve

Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + o(x^n)$le DL à l'ordre n de f en 0
Supposons que f soit paire. $f(-x) = f(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \dots a_n x^n + o(x^n)$
L'unicité du DL en 0 nous donne $-a_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$; $-a_3 = a_3 \Rightarrow a_3 = 0$; … $-a_{2p+1} = a_{2p+1} \Rightarrow a_{2p+1} = 0$
Supposons que f soit impaire. $-f(-x) = f(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \dots a_n x^n + o(x^n)$
L'unicité du DL en 0 nous donne $-a_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$; $-a_3 = a_3 \Rightarrow a_3 = 0$; … $-a_{2p+1} = a_{2p+1} \Rightarrow a_{2p+1} = 0$

Propriété	Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction définie sur I. Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = f(a+x)$. Cette fonction est donc définie sur $J = \{x \in \mathbb{R} / \exists y \in I \text{ tq } x = y - a\}$ Les deux phrases suivantes sont équivalentes. • f admet un développement limité à l'ordre n autour de a • φ admet un développement limité à l'ordre n autour de 0

Preuve

f admet un développement limité à l'ordre n autour de $a \Leftrightarrow \exists a_0, a_1 \dots a_n$ tels que
$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ au voisinage de a
Posons $x = a + h$. Cela équivaut à

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots a_n h^n + o(h^n) \text{ au voisinage de } 0$$
$$\Leftrightarrow \varphi(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots a_n h^n + o(h^n) \text{ au voisinage de } 0$$

φ admet un développement limité à l'ordre n autour de 0

Remarque	Déterminer le DL à l'ordre n en a d'une fonction revient donc à déterminer le DL à l'ordre n en $zéro$ d'une fonction translatée par rapport à la précédente.
Théorème	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que au voisinage de a, f admet un DL à l'ordre n : $$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$ On suppose que f admet une primitive F sur I. Alors au voisinage de a : $$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)} + o((x-a)^{n+1})$$ Cela signifiant que le DL d'une primitive s'obtient en primitivant terme à terme tous les termes du DL d'une fonction.

Preuve

Posons $P(x) = F(a) + a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)}$ et $Q(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n$
Nous avons $P' = Q$
Il s'agit de montrer que $F(x) - P(x) = o((x-a)^{n+1})$ au voisinage de a
Supposons $x > a$.
Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\varphi = F - P$ entre a et x nous dit que $\exists c_x \in]a; x[$ tq

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c_x)(x-a)$$
$$\Leftrightarrow F(x) - P(x) - F(a) + P(a) = \big(f(c_x) - Q(c_x)\big)(x-a) \text{ (En effet } \varphi' = f - Q)$$
$$\Leftrightarrow F(x) - P(x) = o((c_x - a)^n)(x-a)$$
$$\Leftrightarrow F(x) - P(x) = (c_x - a)^n \varepsilon(c_x - a)(x-a) \text{ avec } \lim_{c_x \to a} \varepsilon(c_x - a) = 0$$

Il vient $\frac{F(x)-P(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{(c_x-a)^n \varepsilon(c_x-a)(x-a)}{(x-a)^{n+1}} = \left[\frac{c_x-a}{x-a}\right]^n \varepsilon(c_x - a)$. Nous avons $\left|\left[\frac{c_x-a}{x-a}\right]^n\right| \leq 1$ car $c_x \in]a; x[$

$\lim_{x \to a} \varepsilon(c_x - a) = \lim_{c_x \to a} \varepsilon(c_x - a) = 0$ Donc $\lim_{x \to a} \frac{F(x)-P(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0 \Rightarrow F(x) - P(x) = o((x-a)^{n+1})$

Dans le cas où $x < a$.
Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\varphi = F - P$ entre x et a nous dit que $\exists c_x \in]x; a[$ tq

$$\varphi(a) - \varphi(x) = \varphi'(c_x)(a-x) \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c_x)(x-a)$$

Et nous sommes ramenés au cas $x > a$.

Remarque	Pour l'instant nous étudions des situations où nous supposons l'existence d'un DL. Mais cette existence est elle assurée. Le théorème suivant nous apporte cette existence. C'est le théorème de Taylor Young
Théorème	Soit I un intervalle ouvert et $f \in C^n(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in I$. Alors f admet un DL à l'ordre n. Ce DL est : $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$ $$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Preuve

C'est une démonstration par récurrence. Soit $P(n)$ la propriété : $f \in C^n(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$
Initialisation : Nous avons déjà vu que la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$
Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie. Soit f une fonction telle que $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Nous avons alors $f' \in C^n(I,\mathbb{R})$.
D'après l'hypothèse de récurrence f' admet un DL à l'ordre n en a.

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

f étant une primitive de f' nous appliquons le théorème précédent d'intégration et nous obtenons

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)} + o((x-a)^{n+1}) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k)!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Propriété	Soit I un intervalle ouvert et $f \in C^n(I,\mathbb{R})$. Soit $a \in I$. On suppose que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ Alors pour $0 \le p \le n$ $a_p = \frac{f^p(a)}{p!}$

Preuve

f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
Mais $f \in C^n(I,\mathbb{R})$ donc d'après le théorème de Taylor Young :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

L'unicité de tout DL conclut la preuve.

Exemples

Les DL à connaitre par cœur cette année sont les suivants. Au voisinage de 0 :

- $exp\, x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
- $sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{n!}x^k + o(x^n)$
- $Arctan\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

Preuve

- Les DL de $\exp x$ et $\sin x$ peuvent se trouver à l'aide d'un simple développement de Taylor Young en 0.
- Le DL de $\cos x$ peut se trouver en primitivant au signe près celui de $\sin x$. N'oublions pas que $(\cos x)' = -\sin x$
- A partir du DL de e^x, il est aisé de trouver celui de e^{-x} (on remplace x par $-x$). Le DL de chx s'obtient grâce à la formule $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Celui de shx à l'aide de la formule $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Nous avons déjà vu tout au début de ce document quel était le DL de $\frac{1}{1-x}$. En remplacant x par $-x$ on obtient le DL de $\frac{1}{1+x}$. Une primitive de $\frac{1}{1+x}$ étant $\ln(1+x)$ il suffit ensuite de primitiver le DL de $\frac{1}{1+x}$ pour obtenir celui de $\ln(1+x)$
- Pour le DL de $(1+x)^\alpha$ il faut se servir directement de la formule de Taylor Young
- Nous savons que $(Arctanx)' = \frac{1}{1+x^2}$. Le DL de $\frac{1}{1+x^2}$ s'obtient à partir du DL de $\frac{1}{1+x}$ en remplacant x par x^2
  Une fois ce DL obtenu il faut le primitiver pour obtenir le DL de $Arctanx$

Remarque	• Une fonction peut avoir un DL à l'ordre n sans être forcément dérivable n fois. • Un DL ne se dérive a priori pas. Le DL de f à l'ordre n ne donne pas forcément celui de f' à l'ordre $n-1$.

Preuve

- soit f définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$

  Nous avons $f(x) = x^2 * xsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Au voisinage de 0, $\lim\limits_{x\to 0} xsin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow f(x) = o(x^2)$

  Donc f admet un DL à l'ordre 2 en 0.

  Pourtant cette fonction n'est pas deux fois dérivable en 0. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ car

  $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et

  $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3 * \left(-\frac{2}{x^3}\right)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$

  Or f' n'admet pas de limite finie en 0. Elle n'est donc pas continue en 0. Elle ne peut donc pas être dérivable. f n'est donc pas deux fois dérivable.
- Nous avons vu que f admettait un DL à l'ordre 2 en 0. Si f' admettait un DL à l'ordre 1 en 0, cela signifierait que f' serait dérivable en 0. Or nous avons vu que f' n'était pas dérivable en 0. Donc f' n'admet pas de DL à l'ordre 1 en 0.

Exercice	Réalisons un DL à l'ordre 3 en 0 de $\tan x$

Solution

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + (x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Remarque	Une fiche entière d'applications pour les développements limités a été dirigée. Je vous y donne rendez vous.