Equivalents

Exemples — Equivalents en 0

$sinx \sim x$	$tanx \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
$Arcsinx \sim x$	$Arctanx \sim x$	$shx \sim x$		

Preuve

Les preuves reposent toutes sur la même mécanique.
Soit $\varphi(x) = \sin x$. $\varphi'(0) = 1$ Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x$

Exemples — Toujours en 0

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$chx - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

Preuve

- Nous avons $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow 1 = -\cos x + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 2 = 1 - \cos x + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 1 - \cos x = 2 - 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Donc $1 - \cos x = 2(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$; $sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2}$ donc $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x^2}{4} \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- Nous avons aussi $ch(x) = 2ch^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow ch(x) - 1 = 2\left(ch^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) = 2sh^2(\frac{x}{2})$
  D'où $ch(x) - 1 \sim 2sh^2(\frac{x}{2})$

Exemples

Equivalent en 1	Equivalent en 1^-
$\ln x \sim x - 1$	$Arcos\ x \sim \sqrt{1-x^2}$

Preuve

- $\ln x = \ln(h+1)$ avec $h = x - 1$ Or lorsque $x \to 1$ nous avons $h \to 0$. Nous pouvons donc utiliser l'équivalent trouvé précédemment en 0 : $\ln(1+h) \sim h$. Nous avons donc bien en 1 : $\ln x \sim x - 1$
- Nous savons que en 0 : $sint \sim t$. Or lorsque $x \to 1^-$ nous avons $Arcos\ x \to 0^+$ donc d'après une propriété de composition à droite, en 1 : $\sin Arcos\ x \sim Arcos\ x\ (*)$
  Nous savons aussi que $\sin^2 Arcos\ x + \cos^2 Arcos\ x = 1 \Rightarrow \sin^2 Arcos\ x = 1 - x^2 \Rightarrow \sin Arcos\ x = \pm\sqrt{1-x^2}$
  Or $Arcos\ x \geq 0$ donc $\sin Arcos\ x = \sqrt{1-x^2}$. En revenant à $(*)$ nous avons en 1 : $Arcos\ x \sim \sqrt{1-x^2}$

Exemples — Equivalents en $+\propto$

$\sum_{k=0}^n a_k x^k \sim a_n x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$chx \sim \frac{e^x}{2}$	$shx \sim \frac{e^x}{2}$

Preuve

- $\sum_{k=0}^n a_k x^k = x^n(\sum_{k=0}^n a_k x^{k-n})$. Pour tout $k < n$ nous avons $\lim_{x\to+\propto} a_k x^{k-n} = 0$ Donc $\lim_{x\to+\propto} (\sum_{k=0}^n a_k x^{k-n}) = a_n$
  Nous avons $(\sum_{k=0}^n a_k x^{k-n}) \sim a_n$ Donc $\sum_{k=0}^n a_k x^k \sim a_n x^n$
- $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2}(1 + e^{-2x})$. $\lim_{x\to+\propto}(1 + e^{-2x}) = 1 \Rightarrow 1 + e^{-2x} \sim 1 \Rightarrow chx \sim \frac{e^x}{2}$
- $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2}(1 - e^{-2x})$. $\lim_{x\to+\propto}(1 - e^{-2x}) = 1 \Rightarrow 1 - e^{-2x} \sim 1 \Rightarrow shx \sim \frac{e^x}{2}$

Exercices — Equivalents en 0

$thx \sim x$	$\sin(3x) - \sin(x) \sim 2x$	Soient a et b deux réels distincts. $e^{ax} - e^{bx} \sim (a-b)x$

Preuve

- $thx = \frac{shx}{chx}$; $shx \sim x$; $\lim_{x\to 0} chx = 1 \Rightarrow chx \sim 1 \Rightarrow thx \sim x$
- $sin(3x) - \sin(x) = \sin(2x + x) - sinx = sin2xcosx + sinxcos2x - sinx = 2sinxcos^2 x + sinxcos2x - sinx = sinx(2cos^2x + cos2x - 1)$. $\lim_{x\to 0}(2cos^2x + cos2x - 1) = 2 \Rightarrow 2cos^2x + cos2x - 1 \sim 2 \Rightarrow sin(3x) - \sin(x) \sim 2x$
- Nous savons que : $e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x) \Rightarrow e^{ax} - 1 = ax + o(x)$
  Or $e^{bx} - 1 = bx + o(x)$ donc en retranchant ces deux égalités il vient $e^{ax} - e^{bx} = (a-b)x + o(x)$
  Donc $e^{ax} - e^{bx} \sim (a-b)x$

<table>
<tr><td>Exercices</td><td colspan="5">Equivalents en 1^-</td><td colspan="5">$\sqrt{(1-x^2)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$</td></tr>
<tr><td colspan="11">Preuve</td></tr>
<tr><td colspan="11">$\sqrt{(1-x^2)} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$; $\sqrt{1+x} \sim \sqrt{2}$ donc $\sqrt{(1-x^2)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exercices</td><td colspan="10">Equivalents en $+\propto$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$e^{x+\frac{1}{x}} \sim e^x$</td><td colspan="2">$e^{x^2+\arctan x} \sim e^{x^2+\frac{\pi}{2}}$</td><td colspan="2">$ln\,(1+x) \sim lnx$</td><td colspan="2">$th(x) \sim 1$</td><td colspan="2">$th(x)-1 \sim -e^{-2x}$</td></tr>
<tr><td>Preuve</td><td colspan="10">
• $\frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{e^x} = e^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x\to+\propto} e^{\frac{1}{x}} = 1$ donc $e^{x+\frac{1}{x}} \sim e^x$
• $\frac{e^{x^2+\arctan x}}{e^{x^2+\frac{\pi}{2}}} = e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}$ et $\lim_{x\to+\propto} e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}} = 1$ donc $e^{x^2+\arctan x} \sim e^{x^2+\frac{\pi}{2}}$
• $ln(1+x) = \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = lnx + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Or $\lim_{x\to+\propto}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{lnx}\right] = 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = o(lnx)$
Il vient $ln(1+x) = lnx + o(lnx) \Rightarrow\ ln\,(1+x) \sim lnx$
• $th(x) = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ et $\lim_{x\to+\propto} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$ donc $th(x) \sim 1$
• $th(x)-1 = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} - 1 = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} - 1 = \frac{e^x-e^{-x}-e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = -\frac{2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})}$
$(e^x+e^{-x}) \sim e^x$ donc $th(x)-1 \sim -\frac{2e^{-x}}{e^x} \sim -2e^{-2x}$
</td></tr>
</table>