Applications des DL

Exercice 1 : Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes

$f(x)=\dfrac{\sin x-sh\,x}{sh\,x^2}$	$g(x)=\dfrac{\sin x-sh\,x}{x^3}$	$h(x)=\dfrac{\ln(\cos x)+\frac{sh^2(x)}{2}}{(\sin x)^4}$	$i(x)=\dfrac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$

- $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$; $sh\,x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$; Donc $\sin x-sh\,x=-2\frac{x^3}{6}+o(x^3)=-\frac{x^3}{3}+\ o(x^3)$
  Donc $\sin x-sh\,x\sim-\frac{x^3}{3}$ et $sh\,x^2=x^2+o(x^2)\Rightarrow\ sh\,x^2\sim x^2$ donc $f(x)\sim-\frac{x^3}{3x^2}\sim-\frac{x}{3}$
  Il vient $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$
- $\sin x-sh\,x\sim-\frac{x^3}{3}$; Donc $\frac{\sin x-sh\,x}{x^3}\sim-\frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\frac{1}{3}$
- $\ln(\cos x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)$. Or $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Donc $\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$; $sh\,x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ donc $sh^2(x)=x^2+\frac{x^4}{3}+\ o(x^4)$
  $$\ln(\cos x)+\frac{sh^2(x)}{2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}=\frac{7x^4}{24}+o(x^4)\Rightarrow\ \ln(\cos x)+\frac{sh^2(x)}{2}\sim\frac{7x^4}{24}$$
  $(\sin x)^4\sim x^4$ donc $h(x)\sim\frac{7}{24}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\frac{7}{24}$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$; $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}$; $1+\ln(1+x)-e^x=1+x-\frac{x^2}{2}-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)=-x^2+o(x^2)$
  Donc $1+\ln(1+x)-e^x\sim-x^2$
  $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\Rightarrow 1-\cos x=\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\ \Rightarrow 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$
  Il vient $i(x)\sim-\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}\sim-2$ Donc $\lim\limits_{x\to 0}i(x)=-2$

Exercice 2 : Etude locale d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

1. Donner un DL à l'ordre 3 en 0 de f
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0 dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion

1. Nous avons au voisinage de 0, $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+x^3+o(x^3)$ et $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$
   $$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1}{2}*\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}$$
   $$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3+o(x^3)\right]$$
   $$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right]=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+\ o(x^3)$$
2. La fonction admet un DL à l'ordre 1 en 0, donc f est dérivable en 0 et admet une tangente. L'unicité du DL Nous donne $f(0)=\frac{1}{2}$; $f'(0)=-\frac{1}{4}$;
   L'équation de la tangente est donc $y=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$;
3. $f(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)=\frac{x^3}{48}+\ o(x^3)$; $\frac{x^3}{48}$ change de signe au voisinage de 0. Nous en déduisons que la tangente traverse la courbe en $x=0$. Nous avons bien un point d'inflexion.

Exercice 3 : Etude locale d'une courbe
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ 4. Donner un DL à l'ordre 3 en 0 de f 5. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0 dont on précisera l'équation. 6. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion

4. Nous avons au voisinage de 0, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{2} * \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}$$

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3 + o(x^3)\right]$$

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right] = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

5. La fonction admet un DL à l'ordre 1 en 0, donc f est dérivable en 0 et admet une tangente. L'unicité du DL Nous donne $f(0) = \frac{1}{2}$; $f'(0) = -\frac{1}{4}$;
   L'équation de la tangente est donc $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$;
6. $f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) = \frac{x^3}{48} + o(x^3)$; $\frac{x^3}{48}$ change de signe au voisinage de 0. Nous en déduisons que la tangente traverse la courbe en $x = 0$. Nous avons bien un point d'inflexion.

Exercice 4 : Etude locale d'une courbe
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de la courbe et de la tangente en ce point.

Remarquons que $x^2 + 2x + 2 = 1 + (x+1)^2$; f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \ln(x^2+2x+2) = ln\left[2(\frac{x^2}{2}+x+1\right] = ln2 + \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$$

Nous savons que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ Donc $\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^2)$

$$\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = ln2 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

f admet un DL à l'ordre 1 en 0 donc f est dérivable en 0.L'unicité du DL nous donne $f(0) = ln2$; $f'(0) = 1$;

L'équation de la tangente est $y = x + ln2$

$f(x) - (x + ln2) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. Donc dans un voisinage de 0 nous avons $f(x) - (x + ln2) \sim -\frac{1}{6}x^3$ ce qui induit $f(x) - (x + ln2) \geq 0$ pour $x \leq 0$ et $f(x) - (x + ln2) \leq 0$ pour $x \geq 0$.

La courbe de la fonction est donc au dessus de la tangente pour $x \leq 0$ et en dessous pour $x \geq 0$, le tout dans un voisinage de 0.

Exercice 5 : Branches infinies
A l'aide de développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$

Nous avons $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$

Le DL en 0 de $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$; $\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$;

$\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o(\frac{1}{x^4})$; $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o(\frac{1}{x^4})$;

Donc en $\pm\infty$ $\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=2-\frac{1}{4x^4}+o(\frac{1}{x^4})$

Donc en $+\infty$ nous avons $f(x)=x\left[2-\frac{1}{4x^4}+o(\frac{1}{x^4})\right]=2x-\frac{1}{4x^3}+o(\frac{1}{x^3})$; Il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x=0$; La courbe admet une asymptote: La droite d'équation $y=2x$. $-\frac{1}{4x^3}\leq 0$; Donc la courbe est située en dessous de cette asymptote.

En $-\infty$ nous avons $f(x)=-x\left[2-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]=-2x+\frac{1}{4x^3}+o(\frac{1}{x^3})$; Il vient $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+2x=0$; La courbe admet une asymptote: La droite d'équation $y=-2x$. $\frac{1}{4x^3}\leq 0$; Donc la courbe est située en dessous de cette asymptote.

Exercice 6 : Branches infinies
Prouver que au voisinage de $+\infty$ la courbe représentative de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^*$: $x\to\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ admet une aymptote dont on déterminera l'équation

Nous avons au voisinage de $+\infty$

$1+e^{\frac{1}{x}}=2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *; donc* $f(x)=(1+x)*\frac{1}{\left[2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}=\frac{(1+x)}{2}*\frac{1}{\left[1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]}$

Or $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+x^3+o(x^3)$

$f(x)=\frac{(1+x)}{2}\left[1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{(1+x)}{2}\left[1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$

Nous avons $f(x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=0$ *; Nous en déduisons que la droite d'équation* $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ *est une asymptote pour la courbe en* $\pm\infty$.

$f(x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc en $+\infty$ la courbe de la fonction est en dessous de l'asymptote,

Par contre en $-\infty$ la courbe de la fonction est au dessus de l'asymptote.

Exercice 7 : Branches infinies
Prouver que au voisinage de $+\infty$ la courbe représentative de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^*$: $x \to \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ admet une aymptote dont on déterminera l'équation

Nous avons au voisinage de $+\infty$

$1+e^{\frac{1}{x}} = 2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *; donc* $f(x) = (1+x) * \frac{1}{\left[2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]} = \frac{(1+x)}{2} * \frac{1}{\left[1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]}$

Or $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+x^3+o(x^3)$

$f(x) = \frac{(1+x)}{2}\left[1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{(1+x)}{2}\left[1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$

Nous avons $f(x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = 0$ *; Nous en déduisons que la droite d'équation* $y = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ *est une asymptote pour la courbe en* $\pm\infty$.

$f(x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc en $+\infty$ la courbe de la fonction est en dessous de l'asymptote,

Par contre en $-\infty$ la courbe de la fonction est au dessus de l'asymptote.

Exercice 8 : Régularité

Soient a, b réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & si\ x > 0 \\ ax+b & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a et de b la fonction est-elle continue en 0 ?
2. Pour quelles valeurs de a et de b la fonction est-elle dérivable en 0 ?
3. Pour quelles valeurs de a et de b la fonction est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

1. Nous remarquons que la fonction est parfaitement continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Que se passe-t-il en 0 ?
   Nous avons pour $x > 0$ et au voisinage de 0
   $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$; Donc $f(x) = \frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+o(x)$; Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$
   $f(0) = b$; Donc f continue en 0 ssi $b = -\frac{1}{2}$
2. Nous remarquons que la fonction est parfaitement dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Bien entendu pour parler de dérivablité, la fonction doit être continue, donc $b = -\frac{1}{2}$
   Que se passe-t-il en 0 ?
   $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = a$
   En 0^+ nous avons $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+o(x)-(-\frac{1}{2})}{x} = \frac{1}{3}+o(1)$;
   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{3}$; La fonction est dérivable ssi le nombre dérivé à gauche et égal au nombre dérivé à droite donc ssi $a = \frac{1}{3}$
   En résuné f dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi $b = -\frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{3}$

3. Pour que la dérivée soit continue il faut d'abord qu'elle existe. Nous avons donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{2}$
   Calculons f'
   Pour $x < 0$ $f'(x) = a = \frac{1}{3}$; Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^{*-}$
   Et nous avons $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{3} = f'(0)$
   Pour $x > 0$ $f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{1+x}-1\right]x^2-2x[\ln(1+x)-x]}{x^4} = \frac{1}{x^4}\left[\left(\frac{-x}{1+x}\right)x^2-2x\ln(1+x)+2x^2\right]$
   $$f'(x) = \frac{1}{x^4}\left[\frac{-x^3}{1+x}-2x\ln(1+x)+2x^2\right] = -\frac{1}{x}*\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x^3}\ln(1+x)+\frac{2}{x^2}$$
   Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$; De plus :
   $$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+o(x^2)$$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Donc $f'(x) = -\frac{1}{x}\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) - \frac{2}{x^3}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{2}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{1}{x} + 1 - x + o(x) - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} + o(1) + \frac{2}{x^2}$

$f'(x) = +\frac{1}{3} + o(1)$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{3} = f'(0)$; Nous avons bien la continuité de f' sur $\mathbb{R}$

Exercice 9 : développement asymptotique de suites implicites

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une solution unique x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan x_n$?
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$

   Puis que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

1. Considérons la fonction φ_n définie sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi_n(x) = tanx - x$

   φ_n est dérivable et $\varphi_n{}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 + tan^2x - 1 = tan^2x$

   Nous avons donc $\varphi_n{}'(x) > 0$ sauf en $n\pi$. Cela suffit pour dire que φ_n est strictement croissante sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

   $\lim\limits_{x\to n\pi-\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \varphi_n(n\pi - x)$

   Or $\varphi_n(n\pi - x) = tan(n\pi - x) - (n\pi - x) = \frac{\sin(n\pi-x)}{\cos(n\pi-x)} - (n\pi - x)$

   $\varphi_n(n\pi - x) = \frac{\sin(n\pi)\cos x - \sin x cos(n\pi)}{\cos(n\pi)\cos x + \sin(n\pi)\sin x} - (n\pi - x) = \frac{(-1)^{n+1}sinx}{(-1)^n cosx} - (n\pi - x) = -\tan x - (n\pi - x)$

   Il vient $\lim\limits_{x\to n\pi-\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} [-\tan x - (n\pi - x)] = -\infty$

   $\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \varphi_n(n\pi + x)$

   Or $\varphi_n(n\pi + x) = tan(n\pi + x) - (n\pi + x) = \frac{\sin(n\pi+x)}{\cos(n\pi+x)} - (n\pi + x)$

   $\varphi_n(n\pi + x) = \frac{\sin(n\pi)\cos x + \sin x cos(n\pi)}{\cos(n\pi)\cos x - \sin(n\pi)\sin x} - (n\pi + x) = \frac{(-1)^n sinx}{(-1)^n cosx} - (n\pi + x) = \tan x - (n\pi + x)$

   Il vient $\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} [\tan x - (n\pi + x)] = +\infty$

   φ_n étant continue sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$; $0 \in \left]\lim\limits_{x\to n\pi-\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x)\,; \lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x)\right[$

   Le TVI appliqué aux fontions strictement monotones nous permet d'affirmer que $\exists!\, x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\varphi_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow \tan x_n = x_n$

2. La fonction $\arctan$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,; +\frac{\pi}{2}\right[$.

   $\tan\ \arctan x_n = x_n = \tan x_n$; $\arctan x_n$ et x_n ayant la même tangente, nous pouvons écrire $x_n = p\pi + \arctan x_n$ Avec p entier.

   Or nous savons que $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow p\pi + \arctan x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

   $$\Leftrightarrow \arctan x_n \in \left](n-p)\pi - \frac{\pi}{2}\,; (n-p)\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$
   $$\Leftrightarrow (n-p)\pi - \frac{\pi}{2} < \arctan x_n < (n-p)\pi + \frac{\pi}{2}$$

   $\arctan x_n$ étant dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,; +\frac{\pi}{2}\right[$ nous avons $p = n$

   Il vient $x_n = n\pi + \arctan x_n$

3. Lemme : Prouvons que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

   Considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $\varphi(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$

   par $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} * \frac{x^2}{1+x^2} = 0$; Donc la fonction φ est constante.

$$\varphi(1) = \arctan 1 + \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\ \varphi(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

Nous savons que pour $n \geq 1$; $x_n > 0$

Donc $x_n = n\pi + \arctan x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - Arctan\frac{1}{x_n}$ $(*)$

Nous savons que $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2} ; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Arctan\frac{1}{x_n} = 0$

Car la fonction $Arctan$ est continue en 0.

Nous avons donc bien $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$

4. Retrouvons le DL de $\arctan$

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ ce qui en le primitivant donne $Arctan\ x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Nous avons donc en 0 : $Arctan\ x \sim x$

De $(*)$ nous sortons $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = -Arctan\frac{1}{x_n}$

En $+\infty$ nous avons $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{x_n}$

Or $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}} \leq \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{n\pi-\frac{\pi}{2}}$. Or en $+\infty$ nous avons $\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}} \sim \frac{1}{n\pi} \sim \frac{1}{n\pi-\frac{\pi}{2}}$

Donc $\frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi} \Rightarrow x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi} \Rightarrow x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$

Il est possible d'aller plus loin :

Ecrivons $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Nous avons $x_n = n\pi + \arctan x_n \Rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n = n\pi + \arctan(\ x_n\ )$

$\Rightarrow \varepsilon_n = \arctan(\ x_n\ ) - \frac{\pi}{2} = -Arctan\frac{1}{x_n}$;

Nous avons $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$

Donc $\varepsilon_n = -Arctan\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)} = -Arctan\frac{1}{n\left(\pi+\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = -Arctan\frac{1}{n\pi\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = -Arctan\frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$\varepsilon_n = -Arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n = x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 10 : développement asymptotique de suites implicites
On considère pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + lnx = n$ 1. Démontrer que cette équation admet une unique solution x_n dans $]0\,;+\infty[$ 2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante 3. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ 4. Démontrer que $x_n \sim n$ en $+\infty$ 5. Démontrer que $x_n = n - lnn + o(\ln n)$ 6. Démontrer que $x_n = n - lnn + \frac{lnn}{n} + o(\frac{\ln n}{n})$

1. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = x + lnx$
   $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x}$; Donc φ' strictement positive sur $\mathbb{R}^{*+} \Rightarrow \varphi'$ strictement croissante.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$; et $\varphi(x) = x(1 + \frac{lnx}{x}) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$
   φ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}, n \in \left]\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right[$; nous en déduisons d'après le TVI appliqué aux fonctions strictement montones que $\exists\,!\, x_n \in]0\,;+\infty[$ tel que $\varphi(x_n) = n$

2. Nous avons $\varphi(x_n) = n$ et $\varphi(x_{n+1}) = n + 1$
   La fonction φ est strictement croissante sur $[x_n; x_{n+1}]$
   Donc $x_{n+1} > x_n$. (En effet si nous avions $x_{n+1} \le x_n$ nous aurions $\varphi(x_{n+1}) \le \varphi\,(x_n) \Leftrightarrow n + 1 \le n$ ce qui serait problématique ….)
   $\forall n\ x_{n+1} > x_n$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

3. Supposons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. Nous aurions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in \mathbb{R}$. En effet $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   φ étant continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ nous aurions $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) = \varphi(l)$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ Nous sommes donc arrivés à une contradiction.
   $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas najorée et strictement croissante. Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

4. $x_n + lnx_n = n \Rightarrow x_n\left(1 + \frac{lnx_n}{x_n}\right) = n \Rightarrow \frac{n}{x_n} = 1 + \frac{lnx_n}{x_n}$;
   Nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{lnX}{X} = 0$ (croissance comparée)
   Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{lnx_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = 1 \Rightarrow x_n \sim n$ en $+\infty$

5. $x_n \sim n$ donc $x_n = n + o(n) \Rightarrow \frac{x_n}{n} = 1 + o(1)$; Posons $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$ $(*)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
   Nous avons $x_n + lnx_n = n \Rightarrow \frac{x_n}{n} + \frac{lnx_n}{n} = 1 \Rightarrow \frac{x_n}{n} = 1 - \frac{lnx_n}{n}$
   Donc $a_n = -\frac{lnx_n}{n}$; Nous avons $lnx_n - \ln n = \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = \ln\,(1 + a_n)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1 + a_n) = 0$
   Donc $lnx_n - \ln n = o(1) = o(\ln n)$ donc $lnx_n \sim \ln n$
   Il vient $a_n \sim \frac{-\ln n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{-\ln n}{n} + o(\frac{ln\,n}{n})$
   Revenons à $(*)$ $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n = 1 - \frac{ln\,n}{n} + o\left(\frac{ln\,n}{n}\right)$
   Donc $x_n = n - \ln n + o(\ln n\,)$

6. Nous avons $x_n + lnx_n = n \Rightarrow x_n - \ln n + lnx_n = n - \ln n \Rightarrow x_n + \ln\frac{x_n}{n} = n - \ln n$
   $x_n = n - \ln n - \ln\frac{x_n}{n}$ $(**)$
   Or $x_n = n - lnn + o(\ln n) \Rightarrow \frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$
   Donc en remplacant $\frac{x_n}{n}$ dans $(**)$ il vient :
   $x_n = n - \ln n - \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$; On a $\ln(1 - x) = -x + o(x)$
   Donc $\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$
   Il vient donc $x_n = n - \ln n - \left[-\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right] \Rightarrow x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$