

Détermination d'une application linéaire

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ – ev. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E .
 Soit $i \in I$. L'application qui à tout x de E associe sa i –ième coordonnée est appelée la i –ième forme coordonnée de E et est notée $e_i^*(x)$.
 Par définition nous avons donc si $x \in E$, $x = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i$

Exemple

Soit dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base (e_1, e_2, e_3) le vecteur $x = e_1 - 2e_2 + 3e_3$.
 Nous avons $e_1^*(x) = 1$; $e_2^*(x) = -2$; $e_3^*(x) = +3$; Nous avons donc bien
 $x = e_1^*(x)e_1 + e_2^*(x)e_2 + e_3^*(x)e_3$

Propriété

Les formes coordonnées sont des formes linéaires, c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.

Preuve

Soient x et y deux vecteurs de E . $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$
 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ $\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{i \in I} x_i e_i + \mu \sum_{i \in I} y_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$
 Donc $\forall i \in I$, $e_i^*(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda e_i^*(x) + \mu e_i^*(y)$ donc e_i^* est linéaire.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – ev. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Soit $(g_i)_{i \in I}$ une famille de F .
 Alors Il existe une seule application linéaire f telle que $\forall i \in I, f(e_i) = g_i$.
 En d'autres termes une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base d'espace vectoriel.

Preuve

Il en existe une. Soit $f: \left\{ x \rightarrow \sum_{i \in I} e_i^*(x) g_i \right\}$. Nous savons que les e_i^* sont linéaires donc f aussi.
 Soit $j \in I$. $f(e_j) = \sum_{i \in I} e_i^*(e_j) g_i = g_j$ car $\begin{cases} e_i^*(e_j) = 0 \text{ pour } j \neq i \\ e_i^*(e_j) = 1 \text{ pour } j = i \end{cases}$.
 Nous avons donc trouvé l'oiseau rare. Peut il en exister plus d'une ?
 Soient f et g deux applications telles que $\forall i \in I, f(e_i) = g(e_i) = g_i$.
 Nous avons $\forall i \in I, (f - g)(e_i) = 0$.
 Soit $x \in E$. $(f - g)(x) = (f - g)(\sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i) = \sum_{i \in I} e_i^*(x) (f - g)(e_i) = 0$. Donc $f - g$ est l'application identiquement nulle. Donc $f = g$.

Définition

Deux espaces vectoriels sont dits isomorphes ssi il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$ ev. Soit $F = \mathbb{C}$ un $\mathbb{R}$ ev.
 Soit $\varphi: \left\{ \begin{matrix} E \rightarrow F \\ (x, y) \rightarrow x + iy \end{matrix} \right\}$. φ est linéaire et injective (le vérifier). φ est donc un isomorphisme. E et F sont isomorphes.

Théorème

Deux espaces vectoriels de même dimension finie sont isomorphes.

Preuve

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – ev de dimension finie.
 Soit $B = (e_i)_{i \in I}$ une base de E .
 Soit $B' = (f_i)_{i \in I}$ une base de F .
 Nous avons vu d'après le théorème précédent qu'il existe une seule application linéaire f telle que $\forall i \in I, f(e_i) = f_i$.
 $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Vect}(f_i)_{i \in I}) = \dim(B') = \dim(F)$. Donc $\text{Im}(f)$ sev de F est égal à F . f est donc surjective.
 $\dim(E) = \dim(F)$ donc d'après une propriété vue précédemment f bijective $\Rightarrow f$ isomorphisme.
 Nous en déduisons que E et F sont isomorphes.

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – ev de même dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F alors :
 f inversible à gauche $\Leftrightarrow f$ inversible à droite $\Leftrightarrow f$ bijective.

Preuve

Soit f inversible à gauche. $\exists \varphi \in L(F, E)$ telle que $\varphi \circ f = \text{Id}_E$.
 Soit $x \in \text{Ker } f$. $\varphi \circ f(x) = \varphi(0_F) = 0_E$. Mais $\varphi \circ f(x) = x$ donc $x = 0_E$. Il vient $\text{Ker } f = \{0_E\} \Rightarrow f$ injective $\Rightarrow f$ bijective (car dimensions finies) $\Rightarrow f$ surjective.
 Soit f inversible à droite. $\exists \varphi \in L(F, E)$ telle que $f \circ \varphi = \text{Id}_F$.
 Soit $y \in F$. $y = f \circ \varphi(y)$. Donc $y \in \text{Im } f$. Il vient f surjective $\Rightarrow f$ bijective (car dimensions finies) $\Rightarrow f$ injective.
 Et bien entendu si f bijective alors f surjective et injective.

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – ev. Soient E_1 et E_2 deux sev de E en somme directe. C'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$
 Soient $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors il existe une seule application linéaire f qui coïncide avec f_1 sur E_1 et avec f_2 sur E_2 .

Preuve

Construisons l'application $f: \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto f_1(x_1) + f_2(x_2) \end{cases}$.

x_1 et x_2 étant les vecteurs résultant de la décomposition de x dans E_1 et E_2 .

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f(\lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2)) = f(\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2) = f_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + f_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= \lambda[f_1(x_1) + f_2(x_2)] + \mu[f_1(y_1) + f_2(y_2)] = \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

f est donc bien linéaire.

Supposons qu'une autre application linéaire g coïncide aussi avec f_1 sur E_1 et avec f_2 sur E_2 .

Alors $\forall x \in E \quad g(x) = g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) = f(x)$

f est donc bien l'unique application à vérifier ces propriétés.