Application linéaire.

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.
 On appelle application linéaire de E dans F toute application f telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$
- Une application linéaire de E dans E est appelé un endomorphisme de E
- L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$
- Si $F = \mathbb{K}$ on appelle f une forme linéaire sur E

Exemples

- $(x, y) \rightarrow (3x - 2y; 2x + 4y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$
- $f \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$ est une forme linéaire de $C^0([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \rightarrow f'$ est une application linéaire de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $X \rightarrow AX$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et f une application linéaire de E dans F . Alors $f(0_E) = f(0_F)$

Preuve

$f(0_E) = f(2 \cdot 0_E) = 2f(0_E)$ donc $f(0_E) = 0_F$

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.
 On appelle isomorphisme de E dans F une application f bijective de E dans F .
 On dit alors que E et F sont isomorphes.

Exemple

- $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow a + bX + cX^2$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
- $f \rightarrow \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de E : espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, définies sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

Définition

Dans le cas particulier où f endomorphisme de E est bijectif, on appelle f un automorphisme

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.
 Soit f un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est aussi un isomorphisme.

Preuve.

$\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ Nous avons $x = f(x')$ et $y = f(y')$ avec $(x', y') \in E^2$
 Donc $f^{-1}(\lambda x + \mu y) = f^{-1}(\lambda f(x') + \mu f(y')) = f^{-1}f(\lambda x' + \mu y') = \lambda x' + \mu y' = \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)$
 Donc f^{-1} est linéaire aussi. Etant bijective, c'est aussi un isomorphisme.

Propriété

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -ev.
 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$; $g \in \mathcal{L}(F, G)$ Alors h définie par $h = g \circ f$ appartient à $\mathcal{L}(E, G)$
 En particulier si f et g sont des isomorphismes alors $h = g \circ f$ est un isomorphisme.

Preuve

$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, h(\lambda x + \mu y) = g \circ f(\lambda x + \mu y) = g(\lambda f(x) + \mu f(y)) = \lambda g \circ f(x) + \mu g \circ f(y)$ donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$
 Si f et g sont des isomorphismes alors la composée de deux bijections étant une bijection nous en déduisons que $g \circ f$ sera lui aussi un isomorphisme.

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.
 $\mathcal{L}(E, F)$ est un sev du $\mathbb{K}$ espace vectoriel formé par les fonctions de E dans F .
 Cela signifie surtout qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Preuve

L'application nulle est linéaire donc $\mathcal{L}(E, F)$ est non vide.
 Soient f et g deux éléments quelconques de $\mathcal{L}(E, F)$.
 $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{K}^2$ $(\lambda f + \mu g)(\lambda' x + \mu' y) = \lambda f(\lambda' x + \mu' y) + \mu g(\lambda' x + \mu' y) =$
 $f(\lambda \lambda' x) + g(\mu \lambda' x) + f(\lambda \mu' y) + g(\mu \mu' y) = \lambda'(\lambda f(x) + \mu g(x)) + \mu'(\lambda f(y) + \mu g(y)) = \lambda'(\lambda f + \mu g)(x) + \mu'(\lambda f + \mu g)(y)$
 Donc si f et g sont dans $\mathcal{L}(E, F)$, $\lambda f + \mu g$ l'est aussi. $\mathcal{L}(E, F)$ est donc bien un sev.

Propriété	<p>Soit E un $\mathbb{K}$-ev.</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\mathcal{L}(E, +, \circ)$ est un anneau (en général pas commutatif) d'élément neutre pour la composition qui est l'identité • Le sous ensemble des endomorphismes inversibles de E est un groupe pour la loi $\circ$ noté $GL(E)$
Preuve	
	<ul style="list-style-type: none"> • Nous venons de montrer que la loi $+$ est une loi de composition interne pour $\mathcal{L}(E)$ $\mathcal{L}(E, +)$ est un groupe abélien (A vérifier). Nous avons aussi montré que la loi $\circ$ est une loi de composition interne pour $\mathcal{L}(E)$ Cette loi est associative et distributive par rapport à la loi $+$ d'élément neutre l'identité (qui appartient aussi à $\mathcal{L}(E)$) • Soit f un endomorphisme quelconque de $GL(E)$, nous avons vu que f^{-1} appartenait aussi à $GL(E)$ et bien sur $ff^{-1} = f^{-1}f = Id$
Définition	<p>Un endomorphisme f est nilpotent lorsqu'il existe un entier p tel que $f^p = 0$ Le plus petit entier p vérifiant $f^p = 0$ est appelé indice de nilpotence de f</p>