Bases	
Définition	Soit $(E, +, \ .)$ un $\mathbb{K}$ −espace vectoriel. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une **base** de E ssi cette famille est libre et génetratrice de E
Exemple	La famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$
Preuve	
	• La famille est libre : $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\alpha-\beta=0\\ \alpha=0\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$ • La femille est géneratrice. $\forall \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\alpha-\beta=x_1\\ \alpha=x_2\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\beta=x_2-x_1\\ \alpha=x_2\end{Bmatrix}$
Définition	Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Tout vecteur x de E s'écrit donc sous la forme $x = \sum_{i\in I} x_i\, e_i$ (car $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice) et cette écriture est unique (car $(e_i)_{i\in I}$ est libre). Les $(x_i)_{i\in I}$ sont appelés **coordonnées** de x dans E
Exemple	Nous avons vu que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ Le vecteur $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 3 * \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ Donc les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dans $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$ sont $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
Définition	La plupart des espaces vectoriels ont une base que l'on juge plus naturelle, plus évidente que les autres. Cette base est appelée **canonique**. • Soit n un entier. La famille $e_1\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix}, e_2\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix}, ...\, e_n\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ • Soit n un entier. La famille $1, X, X^2, \dots\dots X^n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ • Soient n, p deux entiers. La famille des matrices $E_{i,j} = \left((e_{l,m})\right)_{\substack{1\le l\le n\\ 1\le m\le p}}$ avec $\begin{Bmatrix} e_{l,m} = 1 \ pour\ l = i\ et\ m = j\\ et\\ e_{l,m} = 0\ sinon\end{Bmatrix}$ est une base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
Exemple	• La famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ • La famille $1, X, X^2$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ • La famille $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Remarques	• Il existe des espaces vectoriels qui ne contiennent pas de base. Par exemple l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ • Généralement les coordonnées d'un vecteur dans un espace vectoriel sont les coordonnées de ce vecteur dans la base canonique de cet espace vectoriel.