Déterminant

Théorème

1. Les opérations élémentaires suivantes : $\begin{Bmatrix} L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j \\ C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j \end{Bmatrix}$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ ne modifient par la valeur d'un déterminant.
2. Les opérations élémentaires suivantes : $\begin{Bmatrix} L_i \longleftarrow \alpha L_i \\ C_i \longleftarrow \alpha C_i \end{Bmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ multiplient le déterminant par α
3. Les opérations élémentaires suivantes : $\begin{Bmatrix} L_i \leftrightarrow L_j \\ C_i \leftrightarrow C_j \end{Bmatrix}$ multiplient le déterminant par -1.

Preuve

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous rappelons ici que $|A| = det_B(c_1, \dots c_n)$ où :
B représente la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $c_1, \dots c_n$ désignent les vecteurs de matrices colonne : $C_1, C_2, \dots C_n$ colonnes de A.

1. $det_B(c_1, \dots c_i, \dots c_n) = det_B(c_1, \dots c_i + \alpha c_j, \dots c_n)$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

En effet det_B est une forme n −linéaire alternée.
Or $det_B(c_1, \dots c_i + \alpha c_j, \dots c_n)$ est le déterminant de la matrice constituée à partir de A en remplacant C_i par $C_i + \alpha C_j$.

2. $det_B(c_1, \dots \alpha c_i, \dots c_n) = \alpha det_B(c_1, \dots c_i, \dots c_n)$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$

En effet det_B est une forme n −linéaire alternée.
Or $det_B(c_1, \dots \alpha c_i, \dots c_n)$ est le déterminant de la matrice constituée à partir de A en remplacant C_i par αC_i

3. $det_B(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots c_n) = -det_B(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots c_n)$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

En effet det_B est une forme n −linéaire alternée.
Or $det_B(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots c_n)$ est le déterminant de la matrice constituée à partir de A en inversant C_i et C_j

Le fait que le déterminant soit insensible à la transposition nous donne le théorème avec les mêmes propriétés sur les lignes.

Définitions

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soient i et j deux entiers avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$

- On appelle mineur de A de position (i, j) le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de A la i −ième ligne et la j −ième colonne. Il est noté $\Delta_{i,j}(A)$
- On appelle cofacteur de A de position (i, j) le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\Delta_{1,1}(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$; $\Delta_{1,2}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\Delta_{2,3}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

Théorème

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A = \left((a_{i,j})\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Soient i et j deux entiers avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$

- Développement du déterminant selon une ligne.

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k}\, \Delta_{i,k}(A)$$

- Développement du déterminant selon une colonne.

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{k,j}\, \Delta_{k,j}(A)$$

Exemple

Avant la preuve, permettons nous un petit exemple. Reprenons les données de l'exemple précédent.
Développons ce déterminant selon la première ligne.

$$|A| = (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} * 2 * \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} * 4 * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$|A| = -(15 + 2) - 2(10 + 1) + 4(4 - 3)$$
$$|A| = -17 - 22 + 4 = -39 + 4 = -35$$

Preuve

Posons $A = \left((a_{i,j})\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $(e_1, \dots e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Nous avons $|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$
Nous allons montrer le développement selon une colonne.

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{k,j}\, \Delta_{k,j}(A)$$

Nous savons que $|A| = det_B(c_1, \dots c_j, \dots c_n)$ où c_j est le vecteur dont la matrice colonne dans $\mathbb{K}^n$ est $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$

Nous pouvons donc écrire $c_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, e_k$.

Il vient $|A| = det_B(c_1, \dots c_j, \dots c_n) = det_B(c_1, \dots \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, e_k, \dots c_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, det_B(c_1, \dots, e_k, \dots c_n)$ $(*)$

$$det_B(c_1, \dots e_k, \dots c_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & 0 & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,j-1} & 1 & a_{k,j+1} & \dots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & 0 & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Echangeons la j –ième colonne avec la $(j-1)$ –ième, puis la $(j-1)$ –ième avec la $(j-2)$ –ième, ….. puis la 2 –ième avec la 1 –ième.

Nous obtenons $det_B(c_1, \dots e_k, \dots c_n) = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ 0 & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ 1 & a_{k,1} & \dots & a_{k,j-1} & a_{k,j+1} & \dots & a_{k,n} \\ 0 & a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Echangeons la k–ième ligne avec la $(k-1)$ –ième, puis la $(k-1)$ –ième avec la $(k-2)$ –ième, ….. puis la 2 –ième avec la 1 –ième.

Nous obtenons $det_B(c_1, \dots e_k, \dots c_n) = (-1)^{j+k} \begin{vmatrix} 1 & a_{k,1} & \dots & a_{k,j-1} & a_{k,j+1} & \dots & a_{k,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ 0 & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ 0 & a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

La dernière matrice étant triangulaire supérieure, nous avons :

Nous obtenons $det_B(c_1, \dots e_k, \dots c_n) = (-1)^{j+k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,1} & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,1} & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,1} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j+k} \Delta_{k,j}(A)$

Revenons à la formule $(*)$. Il vient :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, (-1)^{j+k} \Delta_{k,j}(A).$$

La formule est démontrée.
L'invariance du déterminant quant à la transposition nous permet d'obtenir le développement sur les lignes :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k}\, \Delta_{i,k}(A)$$