Déterminant

Lemme

La seule permutation $\sigma \in S_n$ vérifiant $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \leq i$ est l'identité.

Preuve

Nous allons démontrer par récurrence que si $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \leq i$ alors σ est l'identité.
Soit $P(m)$ $(1 \leq m < n)$ l'hypothèse de récurrence $\forall\, i \in [\![1,m]\!], \sigma(i) = i$
$P(1)$ est vérifié car $\sigma(1) \leq 1$ donc $\sigma(1) = 1$. La récurrence est donc **initialisée**.
Supposons $P(m)$ vérifiée.
Nous savons que $\sigma(m+1) \leq m+1$ mais $\sigma(m+1) \notin [\![1,m]\!]$ car $\forall\, i \in [\![1,m]\!], \sigma(i) = i$. Donc $\sigma(m+1) = m+1$.
L'hérédité est donc démontrée.
Conclusion si $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \leq i$ alors σ est l'identité.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ avec A triangulaire supérieure (ou inférieure)
Alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Preuve

Soit $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice triangulaire supérieure.
Nous savons que $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$
Pour que $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ soit non nul il faut que $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \leq i$. D'après le lemme précédent la seule permutation vérifiant cela est l'identité. Nous avons donc $\det(A) = \varepsilon(Id) \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$
Dans le cas où A est triangulaire inférieure. ${}^{t}A$ est triangulaire supérieure avec ces coefficients diagonaux inchangés.
Nous avons donc $\det(A) = \det({}^{t}A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Théorème

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$
Alors $\det(T) = \det(A)\det(B)$

Preuve

Soit E un $\mathbb{K}$ ev.
Soit φ la forme p –linéaire alternée définie sur E^p par $\varphi(x_1, x_2, \dots x_p) = \begin{vmatrix} X & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$ où X est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ consituée des p matrices colonnes X_i de $\mathbb{K}^p$ correspondant aux vecteurs x_i. $X = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_p \end{pmatrix}$
Nous savons que $\varphi(x_1, x_2, \dots x_p) = |X|\,\varphi(e_1, e_2, \dots e_p)$ où les e_i désignent B_p la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
En particulier si nous appelons $a_1, a_2, \dots a_p$ les p vecteurs dont les matrices colonnes dans B_p sont $A_1, A_2, \dots A_p$ et constituent la matrice A nous avons :

$$\varphi(a_1, a_2, \dots a_p) = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\varphi(e_1, e_2, \dots e_p) = |A| \begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

Nous avons donc établi que $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$ $(*)$

Considérons maintenant ψ la forme $n-p$ linéaire alternée définie sur E^{n-p} par $\psi(x_1, x_2, \dots x_{n-p}) = \begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & X \end{vmatrix}$
où X est la matrice de $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ consituée des p matrices lignes X_i de $\mathbb{K}^{n-p}$ correspondant aux vecteurs x_i. $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_{n-p} \end{pmatrix}$
Là encore nous savons que $\psi(x_1, x_2, \dots x_{n-p}) = |X|\psi(e_1, e_2, \dots e_{n-p})$.
En particulier si nous appelons $b_1, b_2, \dots b_{n-p}$ les $n-p$ vecteurs dont les matrices lignes dans B_p sont $B_1, B_2, \dots B_{n-p}$ et constituent la matrice B nous avons :

$$\psi(b_1, b_2, \dots b_{n-p}) = \begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |B|\,\psi(e_1, e_2, \dots e_{n-p}) = |B| \begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} \ (**)$$

Or $\begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix}$ est triangulaire supérieure. Donc $\begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} = 1$.

Il vient en réunissant $(*)$ et $(**)$ $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B| \begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} = |A||B|$.

Remarque

Dans le cas où $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$
Alors $\det(T) = \det(A)\det(B)$. Un simple passage par la transposée devrait vous en convaincre.

Théorème	Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs. Soit p un entier strictement inférieur à n. $T = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$ où les matrices A_i sont des matrices carré. Alors $\lvert T\rvert = \prod_{i=1}^{p} \lvert A_i\rvert$

Preuve

Une démonstration par récurrence va nous en convaincre.
Le cas $p = 2$ a déjà été traité plus haut. La récurrence est donc **initialisée**.
Passons à **l'herédité**.

Supposons que la propriété soit vraie pour $m < p$ $\begin{vmatrix} A_1 & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_m \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{m} \lvert A_i\rvert$

Nous avons $\begin{vmatrix} A_1 & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_{m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & \times \\ 0 & A_{m+1} \end{vmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_m \end{pmatrix}$.

Nous avons donc $\begin{vmatrix} A_1 & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_{m+1} \end{vmatrix} = \lvert A_{m+1}\rvert \lvert B\rvert$ mais l'hypothèse de récurrence nous dit que $\lvert B\rvert = \prod_{i=1}^{m} \lvert A_i\rvert$

Nous avons donc bien $\begin{vmatrix} A_1 & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_{m+1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{m+1} \lvert A_i\rvert$.

Conclusion : dans les conditions de l'énoncé du théorème $\forall p < n$

$$\lvert T\rvert = \prod_{i=1}^{p} \lvert A_i\rvert$$