Déterminant

Rappel

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

- On appelle mineur de A de position (i,j) le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de A la i −ième ligne et la j −ième colonne. Il est noté $\Delta_{i,j}(A)$
- On appelle cofacteur de A de position (i,j) le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$

Définition

On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs de A. On la note $com(A)$

$$com(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $com(A) = \begin{pmatrix} 17 & -11 & 1 \\ -2 & -9 & +4 \\ -14 & 7 & -7 \end{pmatrix}$. Vérifiez le ….

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A\,{}^t com(A) = com(A)\,{}^t A = \det(A)\, I_n$$

Preuve

Soit $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$; Nous avons

$$com(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \Rightarrow {}^t com(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{j,i}(A)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$$

Posons

$A\,{}^t com(A) = B$ avec $B = \left(\left(b_{i,j}\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$. Nous avons $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}\,(-1)^{k+j}\Delta_{j,k}(A)$ donc :

si $i = j$:

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}\,(-1)^{k+i}\Delta_{i,k}(A) = \det(A) \text{ par définition}$$

si $i \neq j$:

Remplaçons dans A la $j - ième$ ligne par la première. Nous obtenons la matrice A' qui possède deux lignes identiques avec $A' = \left(\left(a'_{i,j}\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$.

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}\,(-1)^{k+j}\Delta_{j,k}(A) = \sum_{k=1}^n a'_{j,k}\,(-1)^{k+j}\Delta_{j,k}(A').$$

En effet nous pouvons remarquer que $\Delta_{j,k}(A') = \Delta_{j,k}(A)$

Or par définition $\sum_{k=1}^n a'_{j,k}\,(-1)^{k+j}\Delta_{j,k}(A') = \det(A')$. A' possède deux lignes identiques donc $\det(A') = 0$. Nous avons donc bien $b_{i,j} = 0$

Résumons nous $\begin{cases} b_{i,i} = \det(A) \\ b_{i,j} = 0 \; pour \; i \neq j \end{cases}$. Il vient $B = \det(A)\, I_n$. Nous avons donc bien montré que

$$A\,{}^t com(A) = \det(A)\, I_n$$

En passant à la transposée il vient $com(A)\,{}^t A = \det(A)\, I_n$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

$${}^t com(A) = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -14 \\ -11 & -9 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A\,{}^t com(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & -2 & -14 \\ -11 & -9 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

De même $com(A)\,{}^t A = \begin{pmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$.

Cela nous amène plusieurs enseignements :

$\det(A) = -35$; $\det(A) \neq 0$ donc A est inversible. $A^{-1} = \left(\frac{1}{-35}\right){}^t com(A) = \left(\frac{1}{-35}\right)\begin{pmatrix} 17 & -2 & -14 \\ -11 & -9 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A inversible alors $A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)\,{}^t com(A)$

Preuve

Posons $B = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)\,{}^t com(A)$. Nous avons montré que $AB = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)\det(A)\, I_n = I_n$

Or A est inversible. En multipliant cette égalité à gauche par A^{-1} il vient $B = A^{-1}$