Convergence simple, Convergence uniforme.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{C}$

- On dit que f converge **simplement** vers f sur A ssi $\forall x \in A, \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$
- On dit que f converge **uniformément** vers f sur A ssi $\begin{cases} f_n - f \text{ bornée sur } A \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \end{cases}$

Remarque

Ces deux définitions différentes ont des traductions différentes lorsqu'il s'agit de passer aux quantificateurs.

- Convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur A : :
$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$
- Convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur A : :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \ \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$
Ou dit autrement :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \ \ \forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

En d'autres termes dans le premier cas, on est obligé de regarder la convergence sur chaque x pris individuellement alors que dans le deuxième cas la convergence est globale. Dans le premier cas le N dépend du x considéré, alors que dans le deuxième cas, il ne dépend que de ε.

Exemple

Considérons sur $[0\,;1]$, la suite de fonction définie par $f_n(x) = x^n$

- Il y a convergence simple de la fonction f_n vers la fonction nulle sur $[0;1[$
- Il y a convergence uniforme de la fonction f_n vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[0;\alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$. Par contre il n'y a pas convergence uniforme de f_n sur $[0;1[$

Preuve

- $\forall x \in [0;1[\ \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc convergence simple de f_n vers 0 sur $[0;1[$
- Sur $[0;\alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$, Nous avons $sup_{x\in[0;\alpha]}\,|x^n| \leq \ \alpha^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[0;\alpha]}\,|x^n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x^n\|_\infty = 0$$
Il y a bien convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[0;\alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$.
Plaçons-nous maintenant sur $[0;1[$
$sup_{x\in[0;1[}|x^n| \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ Il suffit de prendre $x = 1 - \frac{1}{n}$
Mais $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$
Un rapide développement limité de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ nous donne $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 + o(1) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = e^{-1} = \frac{1}{e}$$
$sup_{x\in[0;1[}|x^n|$ est donc minoré par une quantité qui ne tend pas vers 0 mais vers $\frac{1}{e}$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} sup_{x\in[0;1[}|x^n| \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|_\infty \neq 0$. Il n'y a pas convergence uniforme sur $[0;1[$

Théorème

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.
On suppose que les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur A et que les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur A vers une fonction f.

Alors f est continue sur A

Preuve

Soit $a \in A$.
Les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues en a.
$$\text{Donc } \forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \alpha > 0 \ tq \ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon_1$$
Les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur A vers une fonction f
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists N > 0 \ tq \ \forall n \geq N \ \ \forall x \in A \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_2$$

$$\forall x \in A \ \ |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \ (*)$$

Prenons $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3}$; $\exists N > 0 \ tq \ \forall n \geq N \ \ \forall x \in A \ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_2$
Donc pour $n \geq N$ $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$
Mais f_n est continue en a. Donc en posant $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$, $\exists \alpha > 0 \ tq \ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Résumons-nous : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ et n tels que $|x-a| < \alpha \Rightarrow \begin{cases} |f(x)-f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ |f_n(a)-f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ |f_n(x)-f_n(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$

En remplaçant ces inégalités dans $(*)$
Il vient $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$
Nous avons démontré la continuité de f en a.