

Déterminant

Définition

Soient E un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n nombres complexes.

On appelle Déterminant de Vandermonde de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et on note $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exemple

$$V_3(2, 3, 4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{vmatrix}$$

Théorème

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Exemple

Avant d'apporter la preuve de ce théorème appliquons le à l'exemple précédent.

$$V_3(2, 3, 4) = (3 - 2)(4 - 2)(4 - 3) = 2$$

Preuve

Posons X une inconnue.

$$V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^n \end{vmatrix}$$

Développons ce polynôme par rapport à la dernière ligne. Il vient :

$$V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \text{ avec } (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Remarquons au passage que $a_n = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X)$ est donc un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n et de coefficient dominant $a_n = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Remarquons ensuite que si $X = x_1, x_2, \dots$ ou x_n alors $V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X) = 0$ car la matrice possèdera deux lignes identiques. Donc les $x_{i_{1 \leq i \leq n}}$ sont racines de $V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X)$.

Remarquons que si deux x_i sont identiques alors $V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X) = 0$.

(toujours le même argument : deux lignes identiques ...)

Par contre si les x_i sont distincts alors nous avons n racines distinctes pour un polynôme de degré n ce qui nous amène à :

$$V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X) = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

Remarquons que cette expression est vraie même si deux x_i sont identiques. (Nous avons alors $V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X) = 0$ et $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$). Nous avons donc bien dans tous les cas :

$$V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, X) = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n (X - x_i) (*)$$

Montrons maintenant par récurrence que

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Initialisation :

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

Hérédité :

Supposons qu'au rang n : $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

D'après (*) nous avons $V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) * \prod_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i)$

$$\text{Donc } V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

La récurrence est démontrée au rang $n + 1$

Nous en déduisons en conclusion que $\forall n \geq 2, V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Remarque

De l'expression $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ nous tirons que le déterminant de Vandermonde d'une matrice est non nul si et seulement si les x_i sont tous distincts.