Déterminant

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel.
Soit φ une forme n –linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$.

$$\forall \sigma \in S_n\ \forall (x_1, \dots x_n) \in E^n\ \varphi\left(x_{\sigma(1)}, \dots x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots x_n)$$

Preuve

Si σ est une transposition τ alors $\varphi\left(x_{\tau(1)}, \dots x_{\tau(n)}\right) = -\varphi(x_1, \dots x_n)$. En effet φ est antisymétrique.
Dans le cas général nous avons que S_n est engendré par les transpositions.
Nous avons donc $\sigma = \tau_p\ o\ \tau_{p-1}\ o \dots . \tau_1$

$$\varphi\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = \varphi\left(x_{\tau_p\, o\, \tau_{p-1}\, o \dots \tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_p\, o\, \tau_{p-1}\, o \dots \tau_1(n)}\right) = -\varphi\left(x_{\tau_{p-1}\, o \dots \tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_{p-1}\, o \dots \tau_1(n)}\right) = \dots = (-1)^p\, \varphi(x_1, \dots x_n)$$

Or $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon\left(\tau_p\ o\ \tau_{p-1}\ o \dots . \tau_1\right) = (-1)^p$. Nous avons bien $\varphi\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots x_n)$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension n.
Soit $B = (e_1, \dots e_n)$ une base de E.
On appelle déterminant de base et l'on note $\det_B$ l'unique forme n –lnéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$ prenant la valeur 1 sur B.

Preuve

L'existence est admise. Prouvons l'unicité.
Soit φ une forme n –linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$ prenant la valeur 1 sur B.
Soit $F = (x_1, \dots x_n)$ une famille de vecteurs de E^n avec $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_j$.

$$\varphi(x_1, \dots x_n) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} e_{i_n}\right) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} \varphi(e_{i_1}, \dots e_{i_n})$$

L'expression $\varphi(e_{i_1}, \dots e_{i_n})$ n'est non nulle que si les e_{i_k} sont tous distincts dans la parenthèse. Leurs indices doivent donc être attribuées par une bijection (permutation) de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$
La formule précédente devient :

$$\varphi(x_1, \dots x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \varphi\left(e_{\sigma(1)}, \dots e_{\sigma(n)}\right) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma)\varphi(e_1, \dots e_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\right) \varphi(e_1, \dots e_n)$$

Or $\varphi(e_1, \dots e_n) = 1$. Donc $\varphi(x_1, \dots x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\right)$.
Le résultat ne dépend que de F et non de φ
Nous serions donc arrivés exactement au même résultat avec une autre forme n –linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$ prenant la valeur 1 sur B. L'unicité est donc démontrée.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension n.
Soit $B = (e_1, \dots e_n)$ une base de E.
Soit $F = (x_1, \dots x_n)$ une famille de vecteurs de E^n avec $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_j$.

$$det_B(F) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

Preuve

det_B est une forme n –linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$. Donc en remplacant φ par det_B dans la démonstration précédente il vient :

$$det_B(x_1, \dots x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\right) det_B(e_1, \dots e_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\right) \text{ car } det_B(e_1, \dots e_n) = 1$$

Théorème (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension n.
Soit $B = (e_1, \dots e_n)$ une base de E.
Soit $F = (x_1, \dots x_n)$ une famille quelconque de vecteurs de E^n avec $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_j$.
Soit φ une forme n –linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$.

Alors $\varphi(F) = det_B(F)\, \varphi(e_1, \dots e_n)$

Preuve

Nous avons vu que si φ est une forme n –linéaire alternée quelconque de E^n dans $\mathbb{K}$ alors :

$$\varphi(x_1, \dots x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\right) \varphi(e_1, \dots e_n) = det_B(F)\, \varphi(e_1, \dots e_n)$$

Remarque

De la preuve précédente nous pouvons conclure que l'espace des formes n –linéaires alternées de E^n dans $\mathbb{K}$ est de dimension 1.

Application $n = 2$.

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension 2
Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de E.

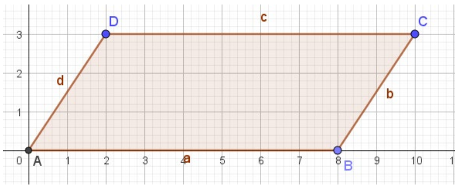
Soit $F = (x_1, x_2)$ une famille quelconque de vecteurs de E^2 avec $x_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $x_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$det_B(x_1, x_2) = xy' - yx'$ que l'on peut noter aussi $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Exemple

Considérons le parallélogramme ABCD suivant engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
Essayons de calculer l'aire :
Elle est donnée par la formule :

$A = Base * Hauteur = 8 * 3 = 24$ unités d'aire.



Déterminons maintenant le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dont les coordonnées sont exprimées dans B : la base canonique de $\mathbb{R}^2$ $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous avons $det_B(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$

Nous retrouvons le même résultat.
En dimension 2, le déterminant peut donc nous aider à trouver l'aire d'un parallélogramme ?
Oui mais attention au signe. En effet si nous avions calculé $det_{B'}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ avec $B' = (e_2, e_1)$ nous aurions trouvé -24. $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -24$
Le déterminant nous donne donc l'aire orienté du parallélogramme, c'est-à-dire l'aire en fonction d'une unité d'aire provenant d'une base orientée. $B \neq B'$
En dimension 2, il convient donc d'utiliser une valeur absolue pour avoir l'aire géométrique du parallélogramme.

Application $n = 3$.

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension 3
Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

Soit $F = (x_1, x_2, x_3)$ une famille quelconque de vecteurs de E^3 avec $x_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $x_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$det_B(x_1, x_2, x_3) = xy'z'' - xz'y'' - yx'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x''$$

que l'on peut noter aussi $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

Exemple

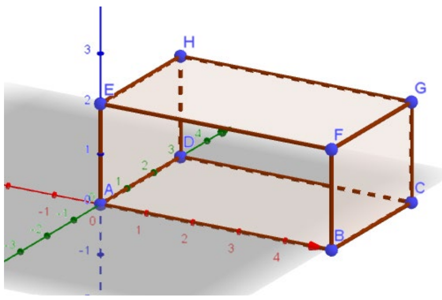
Considérons dans le repère ci-contre le pavé droit $ABCDEFGH$ engendré par $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$. Le volume de ce pavé droit est donné par :

$$V = AB * AD * AE = 5 * 3 * 2 = 30$$

Dans ce repère nous avons $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$det_B(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 30$$

Là encore nous constatons qu'en dimension 3 le déterminant de trois vecteur est égal (en valeur absolue) au volume du pavé droit que ces vecteurs engendrent. Là encore le déterminant de trois vecteurs donne le volume orienté du pavé droit formé par ces trois vecteurs.



Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n.
Soient B et B' deux bases de E
Soit F une famille de n vecteurs de E

Alors $det_{B'}(F) = det_B(F) * det_{B'}(B)$ $(**)$

Preuve

$det_{B'}$ est une forme n –linéaire alternée. Nous avons montré (théorème (*)) que si φ était une une forme n –linéaire alternée alors $\varphi(F) = det_B(F)\, \varphi(e_1, \ldots e_n)$

Nous avons donc $det_{B'}(F) = det_{B'}(B) * det_B(F)$

Théorème	Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n. Soit B une base de E. Soit F une famille de n vecteurs de E. F est une base de E ssi $det_B(F) \neq 0$ Dans ce cas nous avons $det_B(F) * det_F(B) = 1$

Preuve

det_B est une forme n −linéaire alternée donc s'annulle sur une famille liée.
$det_B(F) \neq 0 \Rightarrow F$ famille libre. Or en dimension n, F famille libre ssi F base.
Nous avons donc $det_B(F) \neq 0 \Rightarrow F$ base

Si F est une base remplaçons F par B' dans $(**)$. Il vient $det_{B'}(B') = det_{B'}(B) * det_B(B') \Rightarrow 1 = det_{B'}(B) * det_B(B')$
Donc $det_B(B') \neq 0 \Rightarrow det_B(F) \neq 0$

Nous avons donc bien F est une base de E ssi $det_B(F) \neq 0$

Et nous avons bien dans ce cas $1 = det_F(B) * det_B(F)$