

### Déterminant matrice

#### Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Il est aisé de voir  $A$  comme la matrice de  $n$  vecteurs colonnes  $C_1, \dots, C_n$  dont les coordonnées de chaque  $C_j$  dans  $B_c$  la base canonique  $\mathbb{K}^n$  de sont  $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ . Soit  $B_c$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$

On appelle déterminant de  $A$  et on note  $\det(A)$  la valeur :  $\det_{B_c}(C_1, \dots, C_n)$

Nous avons donc  $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ .

$$\text{On utilise aussi la notation } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

#### Propriété

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

Soit  $F$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

Soit  $B$  une base de  $E$ .

$$\text{Alors } \det(\text{Mat}_B(F)) = \det_B(F)$$

#### Preuve

Il s'agit de revenir à la définition. En supposant  $\text{Mat}_B(F) = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Nous avons  $\det(\text{Mat}_B(F)) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ .  $\det_B(F)$  coïncide parfaitement avec cette valeur.

#### Propriété

L'application  $\left\{ \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ A \mapsto \det(A) \end{matrix} \right\}$  est  $n$ -linéaire alternée par rapport aux colonnes de  $A$ .

#### Preuve

Il suffit de revenir à la définition  $\det(A) = \det_{B_c}(C_1, \dots, C_n)$  où  $C_1, \dots, C_n$  sont les vecteurs colonnes de  $A$  et  $B_c$  la base canonique  $\mathbb{K}^n$ .  $\det_{B_c}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée, la conclusion coule donc de source.

#### Propriété

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ ssi } \det(A) \neq 0$$

#### Preuve

Là encore un retour à la définition s'impose.

Nous avons vu que  $\det(A) = \det_{B_c}(C_1, \dots, C_n)$  où  $C_1, \dots, C_n$  sont les vecteurs colonnes de  $A$  et  $B_c$  la base canonique  $\mathbb{K}^n$

Nous avons vu lors du chapitre précédent sur les déterminants que  $\det_{B_c}(C_1, \dots, C_n) \neq 0$  ssi  $(C_1, \dots, C_n)$  base de  $\mathbb{K}^n$ .

Or  $(C_1, \dots, C_n)$  base de  $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A$  inversible.

Il vient bien :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ ssi } \det(A) \neq 0$$

#### Propriété

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

#### Preuve

$$\text{Avec les notations précédentes : } \det(\lambda A) = \det_{B_c}(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n) = \lambda^n \det(A)$$

#### Propriété

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

#### Preuve

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

Soient  $B_1, \dots, B_n$  les matrices colonnes de  $B$ .

$$\det(AB) = \det_{B_c}(AB_1, \dots, AB_n)$$

Soit  $\varphi : \left\{ (C_1, \dots, C_n) \rightarrow \det_{B_c}(AC_1, \dots, AC_n) \right\}$   $C_1, \dots, C_n$  étant des vecteurs colonnes de  $\mathbb{K}^n$ .

Il est aisé de démontrer que  $\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée. D'après un théorème précédent nous avons :

$$\varphi(C_1, \dots, C_n) = \det_{B_c}(C_1, \dots, C_n) \varphi(e_1, \dots, e_n) \text{ où } e_1, \dots, e_n \text{ représente la base canonique de } \mathbb{K}^n.$$

Nous avons donc  $\det_{B_c}(AC_1, \dots, AC_n) = \det_{B_c}(C_1, \dots, C_n) \det_{B_c}(AE_1, \dots, AE_n)$

où  $E_1, \dots, E_n$  représentent les vecteurs colonnes représentatifs de  $e_1, \dots, e_n$

En remplaçant  $(C_1, \dots, C_n)$  par  $(B_1, \dots, B_n)$  il vient :

$$\det_{B_c}(AB_1, \dots, AB_n) = \det_{B_c}(B_1, \dots, B_n) \det_{B_c}(AE_1, \dots, AE_n)$$

$$\det_{B_c}(AB_1, \dots, AB_n) = \det_{B_c}(B_1, \dots, B_n) \det_{B_c}(A_1, \dots, A_n)$$

où  $A_1, \dots, A_n$  représentent les vecteurs colonnes de  $A$

Il nous vient donc bien :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

### Propriété

Soient  $A \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

### Preuve

La propriété précédente nous donne  $\det(I_n) = \det(A A^{-1}) = \det(A) * \det(A^{-1})$

Or en appelant  $B_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  nous avons  $\det(I_n) = \det_{B_c}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$  par définition.

Nous avons donc  $\det(A) * \det(A^{-1}) = 1$ . Les deux déterminants étant nos nuls nous pouvons écrire :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

### Propriété

Deux matrices semblables ont même déterminant.

### Preuve

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  semblables.  $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = P^{-1}BP$ .

$$\text{Donc } \det(A) = \det(P^{-1}) \det(B) \det(P) = \frac{1}{\det(P)} * \det(B) \det(P) = \det(B)$$

### Propriété

Une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et sa transposée ont même déterminant.

### Preuve

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $A = \left( (a_{i,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

$${}^tA = \left( (b_{i,j}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ avec } b_{i,j} = a_{j,i}$$

Nous avons donc

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i), i} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1} \circ \sigma(i), \sigma(i)}$$

$\sigma$  étant une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , lorsque  $i$  parcourt  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sigma(i)$  parcourt  $\llbracket 1, n \rrbracket$

Nous avons donc :

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i), i}$$

$\varepsilon$  étant un morphisme de  $S_n$  vers  $\{1; -1\}$  nous avons  $\varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma^{-1}) = 1 \Rightarrow \varepsilon(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$

$$\text{Il vient } \det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i), i}$$

Lorsque  $\sigma$  décrit  $S_n$ ,  $\sigma^{-1}$  décrit  $S_n$  donc

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} = \det(A)$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Propriété                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Le déterminant est $n$ –linéaire par rapport aux lignes d’une matrice.         |
| Preuve                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                |
| La $n$ –linéarité de $\det$ sur les colonnes et le fait que le déterminant d’une matrice et de sa transposée sont égaux suffisent.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                |
| Théorème                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $\det$ induit un morphisme de groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}^*$ |
| Preuve                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                |
| <p>Nous savons que <math>(\mathbb{K}^*,*)</math> et <math>(GL_n(\mathbb{K}), o)</math> sont des groupes. (A vérifier si vous n’en êtes pas convaincu)</p> <p>Nous avons déjà vu que le déterminant d’une matrice inversible est non nul.</p> <p><math>\det</math> va donc bien de <math>GL_n(\mathbb{K})</math> à <math>\mathbb{K}^*</math></p> <p>De plus <math>\forall (A,B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2, \det(AB) = \det(A) \det(B)</math>. <math>\det</math> induit donc bien un morphisme de groupe de <math>GL_n(\mathbb{K})</math> vers <math>\mathbb{K}^*</math></p> |                                                                                |