Dimension	
Définition	Un espace vectoriel est dit de **dimension** finie lorsqu'il possède une famille génératrice de cardinal fini. Dans le cas contraire on dit que cet espace vectoriel est de dimension infinie.
Exemples	• $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 car il est généré par $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ • $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie car il n'existe pas de famille de cardinal fini : $1, X, X^2 \dots X^n$ génératrice de $\mathbb{R}[X]$
Remarque	Le sev d'un ev est forcément de dimension finie.
Théorème	Soit E un espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute famille libre de vecteurs de E possède au maximum n éléments.

Preuve

Soit $E = vect(e_1, e_2, \dots e_n)$. Supposons qu'il existe dans E une famille de vecteurs libres, les $(l_i)_{i\in I}$ qui possède au moins $n+1$ vecteurs. Extrayons de cette famille les $n+1$ premiers vecteurs : $l_1, l_2, \dots l_n, l_{n+1}$.
Ces vecteurs constituent une famille libre eux aussi.

Nous allons montrer par récurrence sur k tel que $0 \leq k \leq n$ que E est engendré par $n-k$ vecteurs appartenant à la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et k vecteurs de $(l_i)_{1\leq i\leq n}$

Initialisation : Pour $k = 0$ $E = vect(e_1, e_2, \dots e_n)$. Donc la récurrence est initialisée.
Hérédité : Quitte à réindexer les $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et les $(l_i)_{1\leq i\leq n}$
Nous pouvons supposer que $E = vect(e_1, e_2, \dots e_{n-k,}, l_1, \dots\ l_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$

$l_{k+1} \in E$ donc $l_{k+1} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_{n-k} e_{n-k} + \beta_1 l_1 + \cdots \beta_k l_k$

Il y a au moins un α_i qui est non nul. En efftet si tous les α_i sont nuls, l_{k+1} est combinaison linéaire des l_i ce qui est impossible puisque la famille $(l_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre.
Quitte là encore à reindéxer les $(e_i)_{1\leq i\leq n-k}$ nous pouvons supposer que c'est α_{n-k}

Nous avons donc $e_{n-k} = \frac{1}{\alpha_{n-k}}(l_{k+1} - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 \dots - \alpha_{n-k-1} e_{n-k-1} - \beta_1 l_1 - \cdots \beta_k l_k)$

Donc $E = vect\big(e_1, e_2, \dots e_{n-k,}, l_1, \dots\ l_k\big) = \boldsymbol{vect\big(e_1, e_2, \dots e_{n-k-1,}, l_1, \dots\ l_k, l_{k+1}\big)}$

Conclusion : pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$ E est engendré par $n-k$ vecteurs appartenant à la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et k vecteurs de $(l_i)_{1\leq i\leq n}$.

Appliquons ce résultat à $k = n.$ $E = vect(l_1, \dots\ l_n)$
Or $l_{n+1} \in E$ donc $l_{n+1} \in\ vect(l_1, \dots\ l_n)$ ce qui est une contradiction puisque la famille $(l_i)_{1\leq i\leq n+1}$ est une famille libre.

Propriété	**Algorithme de la base incomplète**	Soit une famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ dont les k premiers vecteurs forment une famille libre. ' Soit $E = vect(e_1, e_2, \dots . e_n)$. Il est possible de trouver une base de E constituée des $(e_i)_{1\leq i\leq k}$ et de quelques vecteurs appartenant à $(e_i)_{k+1\leq i\leq n}$

Preuve

La preuve de cette propriété repose sur un algorithme.
Considérons $F = (e_1, \dots . e_k)$. Cette famille est par hypothèse une famille libre.
Pour i allant de $k+1$ à n
    Si F complété de e_i constitue une famille libre alors on rajoute e_i dans F
    Fin Si
Fin Pour
A la fin de cet algorithme F est donc une famille libre de vecteurs constituée des $(e_i)_{1\leq i\leq k}$ et de quelques vecteurs appartenant à $(e_i)_{k+1\leq i\leq n}$.
Cette famille est-elle génératrice ?
Nous savons que $E = vect(e_1, e_2, \dots . e_n)$. Les $(e_i)_{1\leq i\leq k}$ appartiennent à F.
Considérons e_i avec $k+1 \leq i \leq n$. Soit il appartient à F soit il n'appartient pas. Mais s'il n'appartient pas c'est parce qu'il est combinaison linéaire de vecteurs de F. Donc tous les vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ sont soit dans F soit combinaisons linéaires de vecteurs de F.

Il vient $\boldsymbol{E = vect(e_1, e_2, \dots . e_n) = vect(F)}$

$\boldsymbol{F}$ est donc libre et génératrice, c'est bien une base de $\boldsymbol{E}$.

Théorème	**De la base inconmplète**	Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.

Preuve

Soit L une famille libre de E. Nous avons vu que si E est engendré par n éléments alors $|L| \leq n$
L est donc finie. Soit G une famille finie génératrice de E.
En complétant L par G on obtient une famille G' finie, génératrice de E dont les premiers vecteurs forment une famille libre. En appliquant l'algorithme de la base incomplète à G' nous obtenons B une base finie de E consituée des vecteurs de L et de quelques vecteurs de G.

Théorème	**De la base extraite**	Soit E un espace vectoriel de dimension finie. De toute famille génératrice de E peut être extraite une base finie de E.

Preuve

Soit G une famille génératrice de E (éventuellement infinie). E est de dimension finie donc possède une partie génératrice finie X. Tout vecteur de X est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de G.
Donc il existe une famille finie G' incluse dans G telle que $E = vect(X) = vect(G')$
Appliquons l'algorithme de la base incomplète à une famille G'' constituée de 0 vecteurs libres puis de G'
(en fait $G'' = G'$)
Nous obtenons une famille B finie libre et génératrice consituée de vecteurs de G'. C'est une base de E

Propriété	Soit E un espace vectorel de dimension finie. Alors toutes ses bases sont finies et leur cardinal est identique.

Preuve

Soient $x_1, x_2 \dots x_n$ n vecteurs de E constituant une famille finie génératrice de E.
$E = Vect(x_1, x_2 \dots x_n)$.
Remarquons que si une base existe elle est de cardinal inférieur ou égal à n puisque générée par les $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.
D'après le théorème de la base extraite nous savons que E admet une ou plusieurs bases finies.
Le problème de l'existence est donc aussi réglé. En 'resumé les bases de E sont finies, existent et ont un cardinal $\leq n$
Soient B et B' deux bases finies de E.
Tous les vecteurs de B sont dans $vect\ (B')$. Les vecteurs de B forment une famille libre donc $|B| \leq |B'|$
Tous les vecteurs de B' sont dans $vect\ (B)$. Les vecteurs de B' forment une famille libre donc $|B'| \leq |B|$
Il vient $|B| = |B'|$. Toutes les bases ont donc le même cardinal.

Définition	Soit E un espace vectorel de dimension finie. Toute base de E possède le même cardinal. Nous appellerons cet invariant la **dimension** de E
Exemples	• L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 forme un espace vectoriel de dimension 1. • L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 forme un espace vectoriel de dimension 1. • L'ensemble des suites suivant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 forme un espace vectoriel de dimension 2. • $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$ • $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = np$

Remarque	Soit E un ev. Lorsque $\dim(E) = 1$ on dit que E est une droite vectorielle. Lorsque $\dim(E) = 2$ on dit que E est un plan vectoriel.
Théorème	Dans un espace vectoriel de dimension n toute famille libre possède au plus n éléments et toute famille génératrice possède au minimum n éléments.

Preuve

Soit E un ev avec $\dim(E) = n$. Il possède donc une base B de cardinal n. Cette base est génératrice. Il ne peut donc exister dans E plus de n vecteurs libres. Soit F une famille génératrice de E. Supposons $|F| < n$. Tous les vecteurs de B appartiennent à $Vect(F)$. Nous avons donc n vecteurs linéairement indépendants appartenant à un espace engendré par strictement moins de n éléments. C'est une contradiction. Donc $|F| \geq n$

Théorème	• Dans un espace vectoriel de dimension n toute famille libre de n vecteurs est une base. • Dans un espace vectoriel de dimension n toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Preuve

- Soit L une famille libre de n vecteurs dans E avec $\dim(E) = n$. D'après le théorème de la base incomplète il est possible de la compléter en une base B. Or par définition $|B| = n$ donc $L = B$. L est bien une base.
- Soit G une famille génératrice de n vecteurs dans E. D'après le théorème de la base extraite il est possible d'en extraire une base B. Or par définition $|G| = n$ donc $G = B$. G est bien une base.

Définition	Soit E un espace vectorel de dimension finie. Soient $x_1, x_2 \dots x_n$ n vecteurs de E On appelle **rang** de $x_1, x_2 \dots x_n$ la dimension de $Vect(x_1, x_2, \dots . x_n)$
Propriété	$Rang(x_1, x_2 \dots x_n) \leq \inf(\dim E, n)$

Preuve

$Rang(x_1, x_2 \dots x_n) = \dim(\,Vect(x_1, x_2, \dots . x_n)\,)$. Donc $Rang(x_1, x_2 \dots x_n)$ est égal au cardinal d'une base de $Vect(x_1, x_2, \dots . x_n)$
Une base de $Vect(x_1, x_2, \dots . x_n)$ est consituée de vecteurs linéairement indépendants.
Nous avons déjà vu que le nombre de vecteurs linéairement indépendants dans un espace généré par une famille de n vecteurs était inférieur à n. En posant $p = Rang(x_1, x_2 \dots x_n)$ il vient

$$p \leq n$$

Soit B une base de $vect(x_1, x_2 \dots x_n)$. $|B| = \dim\big(vect(x_1, x_2 \dots x_n)\big) = p$
Soit B' une base de E. En constituant la famille B'' constituée d'abord des vecteurs de B puis des vecteurs de B' on obtient une famille de vecteurs génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont une famille libre. En lui appliquant l'algorithme de la base incomplète on obtient une base de E de cardinal $\dim\,(E)$ dont les p premiers vecteurs sont une famille libre. Donc $p \leq \dim\,(E)$. Nous avons bien

$$p \leq \inf(\dim E, n)$$

Propriété	Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. Soit F un sev de E. Nous avons vu que F était de dimension finie. Mais en plus $\dim(F) \leq \dim\,(E)$

Preuve

Soit B une base de F.
Soit B' une base de E.
En concaténant B et B' on obtient une famille de vecteurs génératrice de E donc les $|B|$ premiers vecteurs forment une famille libre. En appliquant à cette famille l'algorithme de la base incomplète on obtient une base de E : B'' donc les $|B|$ premiers vecteurs forment une famille libre. On a bien $|B''| \geq |B| \Rightarrow \dim(F) \leq \dim\,(E)$

Propriété	Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. Soit F un sev de E. Si $\dim(F) = \dim\,(E)$ alors $F = E$

Preuve

Supposons F un sev de E et $\dim(F) = \dim(E) = n$
Soit $e_1, e_2, \dots . e_n$ une base de F. F étant inclus dans E, c'est une famille libre de n éléments dans E un ev de dimension n donc c'est une base de E. Il vient $F = vect(e_1, e_2, \dots . e_n) = E$

Propriété	Soient E et F deux $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. Alors l'ev produit $E \times F$ est en un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

Preuve

Soit $e_1, e_2, \dots . e_n$ une base de E.
Soit $f_1, f_2, \dots . f_p$ une base de F.
Nous allons montrer que $(e_1, 0_F), (e_2, 0_F), \dots (e_n, 0_F), (0_E, f_1),\ (0_E, f_2), \dots . (0_E, f_p)$ est une base de $E \times F$

- Elle est génératrice
  Soit $(x, y) \in\ E \times F$ avec $x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$ et $y = y_1 f_1 + \cdots y_p f_p$
  $(x, y) = (x_1 e_1 + \cdots x_n e_n, y_1 f_1 + \cdots y_p f_p) = x_1(e_1, 0_F) + \cdots x_n(e_1, 0_F) + y_1(0_E, f_1) + \cdots y_p(0_E, f_p)$.
- Elle est libre
  $\lambda_1(e_1, 0_F) + \cdots \lambda_n(e_n, 0_F) + \mu_1(0_E, f_1) + \cdots \mu_p(0_E, f_p) = (0,0)$
  $\Leftrightarrow (\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \cdots \mu_p f_p) = (0,0)$
  $\Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n = 0$ et $\mu_1 f_1 + \cdots \mu_p f_p = 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = \mu_1 = \cdots \mu_p = 0$

Donc c'est bien une base. Nous en déduisons que :
$E \times F$ est en un $\mathbb{K} - ev$ de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$