Endomorphismes

Rappels Voire généralités sur les applications linéaires.

Soit E un $\mathbb{K}-$ev.

- On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans E
- L'ensemble des endomorphismes de E se note L(E)
- L(E,+,o) est un anneau (en général pas commutatif) d'élément neutre pour la composition qui est l'identité
- Le sous ensemble des endomorphismes inversibles de E est un groupe pour la loi o noté $GL(E)$. Un endomorphisme inversible et donc bijectif s'appelle

Propriété

- En dimension 1 tous les endomorphismes commutent.
- A partir d'une dimension égale à 2 les endomorphismes ne commutent pas en général.

Preuve

- Soit E avec $\dim(E)=1$. Soit e un vecteur base de E. Soient f et g deux endomorphismes.
  Supposons $f(e)=\lambda_f e$ et $g(e)=\lambda_g e$. Soit $x\in E$. Nous avons $x=\lambda_x e$.
  $f(g(x))=f(g(\lambda_x e))=f(\lambda_x g(e))=\lambda_x f(g(e))=\lambda_x f(\lambda_g e)=\lambda_g\lambda_x f(e)=\lambda_f\lambda_g\lambda_x e$
  $g(f(x)=g(f(\lambda_x e))=g(\lambda_x f(e))=\lambda_x g(f(e))=\lambda_x g(\lambda_f e)=\lambda_x\lambda_f g(e)=\lambda_x\lambda_f\lambda_g e$
  Donc $\forall\, x\in E, f(g(x))=\ g(f(x)$
- Soit E un ev de dimension 2 dont $\{e_1,e_2\}$ est une base.
  Considérons l'endomorphisme f défini par $f(e_1)=e_1$ et $f(e_2)=e_1$ ainsi que l'endomorphisme g défini par $g(e_1)=e_2\ et\ g(e_2)=e_2$. Nous avons $f\ o\ g\ (e_1)=f(e_2)=e_1$ et $g\ o\ f(e_1)=g(e_1)=e_2$
  Donc les deux endomorphismes ne commutent pas.

Définition

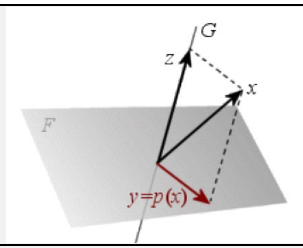
Soit $\lambda\in\ \mathbb{K}$. On appelle homothétie de E tout endomorphisme f de E tel que $\forall x\in E, f(x)=\ \lambda x$

Notation

Soit E un ev. Soit f un endomorphisme de E et k un entier. On note $f^k=f\ o\ f\ o\ \ldots..f$ (k fois)

Définition

Soit E un ev. On suppose $E=F\ \oplus\ G$ avec F et G deux sev de E
Tout élément x de E peut s'écrire $y+z$ avec $y\in\ F$ et $z\in G$
L'application $\begin{Bmatrix}E\to E\\ x\to y\end{Bmatrix}$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G



Propriétés

Soit E un ev. Soient F et G deux sev de E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.

- p est un endomorphisme de E
- $p^2=p$
- $F=Imp=Ker(p-Id)$
- $G=Kerp.$

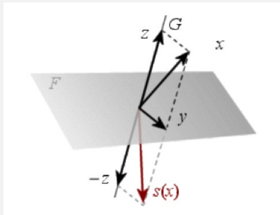
Preuve

- Soit $x\in E.\ x=f+g$ avec $f\in\ F$ et $g\in G.\ p(x)=f$
  Soit $y\in E.\ y=f'+g'$ avec $f'\in\ F$ et $g'\in G.\ p(y)=f'$
  $p(\lambda x+\mu y)=p(\lambda(f+g)+\mu(f'+g'))=p(\lambda f+\mu f'+\lambda g+\mu g')$
  F est un sev donc $\lambda f+\mu f'\in F$ et $\lambda g+\mu g'\in G$. Il vient $p(\lambda x+\mu y)=\ \lambda f+\mu f'$
  $\lambda p(x)+\mu p(y)=\lambda f+\mu f'=\ p(\lambda x+\mu y)$. p est donc linéaire.
  $p(x)=f$ avec $f\in E$ donc p est un endomorphisme.
- Soit $x\in E$. Si $x=f+g$ avec $f\in\ F$ et $g\in G$ nous avons $p(x)=f$
  $p^2(x)=p(f)$. Or $f=f+0_G$ donc $p(f)=f$. Il vient $p^2(x)=f\Rightarrow p^2(x)=p(x)$
- Soit $x\in F$. Nous avons $x=p(x)$ donc $x\in Imp$. Il vient $F\subset\ Imp$
  Soit $x\in\ Imp.\ x=p(y)$ avec $y\in E$. Posons $y=f+g$ nous avons $x=p(f+g)=f$
  donc $x\in F\Rightarrow Imp\subset F$. Conclusion $Imp=F$
  $x\in\ Imp\Rightarrow\exists\ y\in E\ tq\ x=p(y)\Rightarrow x-p(x)=p(y)-p^2(y)=p(y)-p(y)=0.$
  Donc $(p-Id)(x)=0\Rightarrow x\in Ker(p-Id)$. Donc $Imp\subset\ Ker(p-Id)$
  Réciproquement $x\in Ker(p-Id)\Rightarrow(p-Id)(x)\Rightarrow p(x)=x\Rightarrow x\in\ Imp$. Donc $Ker(p-Id)\subset\ Imp.$
  Conclusion $Imp=\ Ker(p-Id)$
- Soit $x\in G.\ x=0_F+G$. Donc $p(x)=0_F\ \Rightarrow x\in Kerp.\ G\subset\ Kerp$
  Soit $x\in\ Kerp.\ x=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$
  Mais $p(x)=0\Rightarrow p(f+g)=0\Rightarrow f=0$ Donc $x=g$ et $x\in G.\ Kerp\subset\ G$
  Conclusion $Kerp=G$

Propriété

Soit E un ev et p un endomorphisme de E. p est un projecteur $ssi\ p^2=p$

Preuve
Nous avons déjà vu que lorsque p est un projecteur alors $p^2 = p$. Mais si $p^2 = p$ alors $E = Kerp \oplus Imp$. Montrons le : En effet $x = x - p(x) + p(x)$. Nous avons $p[x - p(x)] = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ Donc $x - p(x) \in Kerp$. De plus $p(x) \in Imp$ Nous avons bien $E = Kerp + Imp$ Soit $x \in Kerp \cap Imp$. $x \in Imp$ Donc $\exists y \in E\ tq\ x = p(y)$. Or $p(x) = 0 \Rightarrow p^2(y) = 0 \Rightarrow p(y) = 0 \Rightarrow x = 0$. La somme est donc directe. Nous avons bien $E = Kerp \oplus Imp$. p est la projection sur Imp parallèlement à $Kerp$. En effet $\forall x \in E, x = y + z$ avec $y \in Kerp$ et $z \in Imp$ $\left(z = p(z')\right)$. $p(x) = p(y + z) = p(y) + p(z) = 0 + p^2(z') = p(z') = z$. p est donc bien la projection sur Imp parallèlement à $Kerp$.

Définition	Soit E un ev. On suppose $E = F \oplus G$ avec F et G deux sev de E Tout élément x de E peut s'écrire $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ L'application $\left\{\begin{matrix} E \to E \\ x \to y - z \end{matrix}\right\}$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G	

Propriété	Soit E un ev. Soient F et G deux sev de E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. • s est un automorphisme de E. $s^2 = Id$ et $s = s^{-1}$ • $F = Ker(s - Id)$ et $G = Ker(s + Id)$

Preuve
• Soit $x \in E$. $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. $s(x) = s(f + g) = f - g$. $s\,(f - g) = f - (-g) = f + g$ Donc $s^2(f + g) = f + g$. Nous avons bien $s^2 = Id \Rightarrow s$ bijective de réciproque s • Si $x \in F$. Alors $x = x + 0_G$. Donc $s(x) = x \Rightarrow x \in Ker(s - Id)$. On a donc $F \subset Ker(s - Id)$. Soit $x \in Ker(s - Id)$. Posons $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. $s(x) = x \Rightarrow f - g = f + g \Rightarrow g = 0$ Donc $x \in F$. Il vient $Ker(s - Id) \subset F$. En résumé $F = Ker(s - Id)$. Si $x \in G$. Alors $x = x + 0_F$. Donc $s(x) = -x \Rightarrow x \in Ker(s + Id)$. On a donc $G \subset Ker(s + Id)$. Soit $x \in Ker(s + Id)$. Posons $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. $s(x) = -x \Rightarrow f - g = -f - g \Rightarrow f = 0$ Donc $x \in G$. Il vient $Ker(s + Id) \subset G$ d'où $G = Ker(s + Id)$.

Propriété	Soit s un endomorphisme. s est une symétrie ssi $s^2 = Id_E$

Preuve
Nous avons déjà vu que si s était une symétrie alors $s^2 = Id_E$. Si $s^2 = Id_E$ alors $E = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$. Montrons-le : Soit $x \in E$. $x = \frac{x - s(x)}{2} + \frac{x + s(x)}{2}$; $s\left(\frac{x - s(x)}{2}\right) = \frac{s(x) - x}{2} = -\frac{x - s(x)}{2}$; Donc $\frac{x - s(x)}{2} \in Ker(s + Id)$ $s\left(\frac{x + s(x)}{2}\right) = \frac{s(x) + x}{2}$; Donc $\frac{x + s(x)}{2} \in Ker(s - Id)$. On a bien $E = Ker(s - Id) + Ker(s + Id)$. La somme est-elle directe ? Soit $x \in Ker(s - Id) \cap Ker(s + Id) \Rightarrow s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc $s(x) = 0 \Rightarrow s^2(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Oui elle est directe. $E = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id).$ $\forall x \in Ker(s - Id)\ \ s(x) = x\ \ et\ \forall x \in Ker(s + Id)\ \ s(x) = -x$ Donc s est la symétrie par rapport à $Ker(s - Id)$ parallèlement à $Ker(s + Id)$.

Propriété	Soit E un ev. Soient F et G deux sev de E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit p le projecteur sur F parallèlement à E. $p = \frac{s + Id_E}{2}$

Preuve
Soit $x \in E$. $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. $p(x) = f$; $s(x) = f - g$; $\left(\frac{s + Id_E}{2}\right)(x) = \frac{f - g + f + g}{2} = f = p(x)$.