

ev	
Définition	Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle $\mathbb{K}$ espace vectoriel ou plus simplement $\mathbb{K} - ev$ tout ensemble E muni : • Une loi de composition interne "+" que l'on nomme addition • Une loi de composition externe "." de $\mathbb{K} \times E$ dans E Vérifiant les propriétés suivantes : • $(E, +)$ est un groupe commutatif • $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } \forall (x, y) \in E^2 : \begin{cases} (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \end{cases}$ Nous noterons cet ensemble $(E, +, \cdot)$
Remarques	Les éléments de E sont appelés les vecteurs. L'élément neutre de $(E, +)$ est appelé le vecteur nul et se note $\vec{0}$
Exemples	• Un corps $\mathbb{K}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même. • $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ peuvent être vus comme des $\mathbb{R} - ev$ ou des $\mathbb{C} - ev$ • $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. • $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
Définition et Propriété	Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ la loi "+" et la loi "." telles que : Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et tout $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, $x + y = z = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ Et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, λx a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est un $\mathbb{K} - ev$
Preuve	
Evidente. Il faut montrer que $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, +)$ est un groupe abélien puis une à une les propriétés de la loi externe.	
Exemple	• $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est un $\mathbb{R} - ev$. • $\mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) peut être vu comme un $\mathbb{R} - ev$ ou comme un $\mathbb{C} - ev$
Définition et Propriété	Soit A un ensemble non vide et E un $\mathbb{K} - ev$. On note $F(A, E)$ l'ensemble des fonctions de A dans E. On définit alors deux lois sur $F(A, E)$ • L'addition : $\forall (f, g) \in F^2$ $f + g$ est la fonction $\begin{cases} A \rightarrow E \\ x \rightarrow f(x) + g(x) \end{cases}$ • La multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in F$, $\lambda \cdot f$ est la fonction $\begin{cases} A \rightarrow E \\ x \rightarrow \lambda \cdot f(x) \end{cases}$ Alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K} - ev$
Preuve	
La preuve découle directement du fait que E est un $\mathbb{K} - ev$	
Exemple	• Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. $(F(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R} - ev$ • Soit E un $\mathbb{K} - ev$. On note $S(E)$ l'ensemble des suites à valeur dans E. $(S(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K} - ev$
Propriétés	Règles de calcul dans un $\mathbb{K} - ev$. Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Soient x et y deux éléments quelconques de E. Soient λ et μ deux éléments quelconques de $\mathbb{K}$
	• $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ • $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ • $\lambda x = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0_{\mathbb{K}} \\ ou \\ x = 0_E \end{cases}$ • $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda x)$ • $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$ • $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$
Preuve	

	$1_{\mathbb{K}} \cdot x = (1_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x \Leftrightarrow x = x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x \Leftrightarrow 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda x) = \lambda(-x)$ $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (x + (-x)) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot (-x) = \lambda \cdot x + [-(\lambda \cdot x)] = 0_E$ $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot (x + (-y)) = \lambda \cdot x + \lambda(-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$ $(\lambda - \mu) \cdot x = (\lambda + (-\mu)) \cdot x = \lambda \cdot x + (-\mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu x$ - Soit $\lambda x = 0_E$. Supposons $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $x \neq 0_E$. $\mathbb{K}$ est un corps. Donc λ qui est non nul admet un inverse λ^{-1}. Il vient $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0_E = 0_E \Rightarrow (\lambda^{-1} \lambda) \cdot x = 0_E \Rightarrow 1_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$ Et nous sommes arrivés à une contradiction. Nous avons donc $x = 0_E$ ou $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$
Définition	Soient A et I deux ensembles non vides. Une famille d'éléments de A indexée sur I est une application de I dans A que l'on pourra noter $(a_i)_{i \in I}$
Exemple	Lorsque $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}$ nous noterons une famille de A : $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$
Définitions	- Soient $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de scalaires de $\mathbb{K}$. On dira que cette famille est presque nulle lorsque seul un nombre fini de λ_i est non nul. - L'ensemble des familles presque nulles de $\mathbb{K}$ indexées sur I est noté $\mathbb{K}^{(I)}$
Définitions	On peut imaginer deux types de familles de vecteurs : - Les familles finies de type $x_1, x_2, \dots, x_n$ - Les familles infinies indexées sur I, de type $(x_i)_{i \in I}$ A partir de ces deux types de familles de vecteurs on peut construire des combinaisons linéaires. - On appelle combinaison linéaire de vecteurs issus d'une famille finie toute expression du type $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \in \mathbb{K}$ - On appelle combinaison linéaire de vecteurs issus d'une famille infinie de vecteurs toute expression du type $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$
Exemples	- Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Tout vecteur du plan peut s'écrire $\lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ - Tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, X, X^2, \dots, X^n)$
Propriété	Tout espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.
Preuve	
Soit E un espace vectoriel. Plaçons nous dans le cadre le plus général et considérons une famille infinie de vecteurs : $(x_i)_{i \in I}$ où chaque $x_i \in E$ Dans ce cas toute combinaison linéaire de ces vecteurs est du type $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ (λ_i) étant une famille presque nulle il est aisé de renuméroter les λ_i pour que seuls $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient non nuls. Renombrons aussi les x_i et appelons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les vecteurs coefficientés par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. La combinaison linéaire précédente peut donc s'écrire $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ Montrons que $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p \in E$ Initialisation : $x_1 \in E$ donc $\lambda_1 x_1 \in E$ Hérédité : Supposons que $\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p \in E$ Considérons $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1}$. Nous avons $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1} = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) + \lambda_{p+1} x_{p+1}$ D'après l'hypothèse de récurrence $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p \in E$. De plus $x_{p+1} \in E \Rightarrow \lambda_{p+1} x_{p+1} \in E$ On a donc $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) + \lambda_{p+1} x_{p+1} \in E$ Conclusion $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p \in E$ et en particulier $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in E$	