Familles libres / liées.

Définition	Soit $(E,+,\ .)$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel et X une partie de E. On dit que X est **génératrice** de E *ssi* tout élément de E est combinaison linéaire d'éléments de X en d'autres termes $ssi\ Vect(E) = X$. Si $X = \{x_i, i \in I\}$ on dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E
Exemples	• La famille $(1, X, X^2 \dots X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ • La famille $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ • L'ensemble des solutions de l'équation $x - y - 2z = 0\ (*)$ a pour famille génératrice $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ En effet $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ solution de $(*)$ peut s'écrire $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+2z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Donc la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de l'espace des solutions de cette équation.
Définition	Soit $(E,+,\ .)$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ ou que la partie $\{x_i\ / i \in I\}$ est **libre** ou que les vecteurs x_i avec $i \in I$ sont **linéairement indépendants** ssi $\forall (\lambda_i)_{\ i\in I} \in \mathbb{K}^I\ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\ = 0_E$ implique $\forall i \in I, \lambda_i = 0$
Propriété	Si les vecteurs x_i avec $i \in I$ sont des vecteurs **linéairement indépendants** alors toute écriture du type $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{K}^I}$ est unique.

Preuve

Soient $x_1, x_2 \dots x_n$ n vecteurs **linéairement indépendants.** Soit $y \in E$. On suppose que
$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n$ avec $(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$ et $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ deux éléments distincts de $\mathbb{K}^n$.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n \Rightarrow (\lambda_1 - \alpha_1)x_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)x_2 + \cdots (\lambda_n - \alpha_n)x_n = 0_E$$

Or les vecteurs $x_1, x_2 \dots x_n$ sont indépendants donc $\lambda_1 - \alpha_1 = \lambda_2 - \alpha_2 = \cdots \lambda_n - \alpha_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \alpha_1, \dots . \lambda_n = \alpha_n$
Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

Exemple	Les familles présentées précédemment $(1, X, X^2 \dots X^n)$, $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ sont libres.

Preuve

- Le seul polynôme vérifiant $\forall x \in \mathbb{K}\ \ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots\ \lambda_n x^n = 0$ est le polynôme nul donc
$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0$$
- $\lambda_0 \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_0&\lambda_1\\\lambda_2&\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
- $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1 = -\lambda_2\\\lambda_1 = 0\\\lambda_2 = 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\lambda_1 = 0\\et\\\lambda_2 = 0\end{Bmatrix}$

Propriété	Toute famille de polynômes dont les degres sont distincts est dite **échelonnée** en degré ou plus simplement **échelonnée**.
Propriété	Toute famille de polynômes échelonnée est une famille **libre**.

Preuve

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes dont les degré sont tous distincts.
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ appartenant à $\mathbb{K}^I$. Supposons $\sum_{i\in I} \lambda_i P_i = 0$.
Quitte à les réindexer nous supposerons que les $(P_i)_{i\in I}$ sont rangés par ordre strictement décroissant.
En supposant que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ possède n éléments non nuls nous avons donc $\lambda_{i_1} P_{i_1} + \lambda_{i_2} P_{i_2} + \cdots \lambda_{i_n} P_{i_n} = 0$ avec $\deg P_{i_1} > \deg P_{i_2} > \cdots \deg P_{i_n}$ et les λ_{i_j} tous non nuls.
Nous allons établir par récurrence que $\forall j$ avec $1 \leq j \leq n\ \lambda_{i_j} = 0$
Initialisation : $\deg\left(\lambda_{i_1} P_{i_1} + \lambda_{i_2} P_{i_2} + \cdots \lambda_{i_n} P_{i_n}\right) = \deg\left(\lambda_{i_1} P_{i_1}\right) = \deg(0) = -\infty$.
Cela n'est possible que si $P_{i_1} = 0$ ou si $\lambda_{i_1} = 0$. $P_{i_1} = 0$ est exclus car les polyn6omes sont classés par degré strictement décroissant. Il reste donc $\lambda_{i_1} = 0$
Hérédité : Supposons $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \cdots \lambda_{i_k} = 0$ et montrons que $\lambda_{i_{k+1}} = 0$
Nous avons $\lambda_{i_{k+1}} P_{i_{k+1}} + \lambda_{i_{k+2}} P_{i_{k+2}} + \cdots \lambda_{i_n} P_{i_n} = 0$

$$\deg\left(\lambda_{i_{k+1}} P_{i_{k+1}} + \lambda_{i_{k+2}} P_{i_{k+2}} + \cdots \lambda_{i_n} P_{i_n}\right) = \deg\left(\lambda_{i_{k+1}} P_{i_{k+1}}\right) = \deg(0) = -\infty$$

Là encore cela n'est possible que si $\lambda_{i_{k+1}} = 0$

Définition	Une famille ou partie qui n'est pas libre est dite **liée**.
Propriété	Soit $(E,+,\ .)$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. Une famille ou partie de E est dite **liée** ssi un des vecteurs de cette famille ou partie est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille ou partie.
Preuve	Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille liée. Alors $\exists(\lambda_i)_{i\in I}$ appartenant à $\mathbb{K}^I$ non tous nuls tels que $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0_E$. Supposons que $\lambda_j \neq 0$ $(j \in I)$ (Il en existe forcément un ….) alors $x_j = -\frac{1}{\lambda_j}(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}\lambda_i x_i)$ Réciproquement : Soit un vecteur x_j de cette famille combinaison linéaire des autres $(x_i)_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}$ Nous avons $x_j = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}\lambda_i x_i \Rightarrow x_j - \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}\lambda_i x_i = 0.$ $(*)$ Supposons la famille $(x_i)_{i\in I}$ soit liée. Cela impliquerait que tous les coefficients des $(x_i)_{i\in I}$ dans $(*)$ soient nuls. C'est impossible car un des coefficients est égal à 1. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc liée.
Exemple	La famille $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ est liée car $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
Définition	Des vecteurs formant une famille liée sont dits linéairement **dépendants**.
Propriété	Soit $(E,+,\ .)$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. Soient X et Y deux parties de E. • Si Y est libre et $X \subset Y$ alors X est libre • SI X est liée et $X \subset Y$ alors Y est liée • Si X est libre et si $y \in E$ n'est pas combinaison linéaire de vecteurs de E alors $X \cup \{y\}$ est libre.
Preuve	• Soit Y libre et $X \subset Y$. Supposons X liée. Alors il existe un vecteur de X combinaison linéaire d'autres vecteurs de X. Mais tout vecteur de X est un vecteur de Y. Donc il existe un vecteur de Y combinaison linéaire d'autres vecteurs de Y. Cela imoliquerait que Y soit lié ce qui est impossible. • Soit X liée et $X \subset Y$. La démonstration est identique. Il existe un vecteur de X combinaison linéaire d'autres vecteurs de X. Mais tout vecteur de X est un vecteur de Y. Donc il existe un vecteur de Y combinaison linéaire d'autres vecteurs de Y. Y est donc liée. • Supposons que $X = (x_i)_{i\in I}$. Prenons une famille quelconque $(\lambda_i)_{i\in I}$ appartenant à $\mathbb{K}^I$ et un λ quelconque appartenant à $\mathbb{K}$. Supposons $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i + \lambda y = 0$ Si λ est non nul alors y est combinaison linéaire de vecteurs de X ce qui est impossible par rapport aux hypothèses. Donc $\lambda = 0$ et $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$. Mais la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée donc $\forall i \in I$, $\lambda_i = 0$ Nous en déduisons que $X \cup \{y\}$ est libre.