## Formes linéaires alternées

| | |
|---|---|
| **Définition** | Soient $E_1, E_2, \dots E_n$ $n$ espaces vectoriels.<br>Soit $\varphi$ une application de $E_1 \mathrm{x} E_2 \mathrm{x} \dots E_n$ dans $\mathbb{K}$.<br>On dit que $\varphi$ est $n$-linéaire si :<br>$\forall k \in [\![1;n]\!]$ pour tous $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots x_{k-1} \in E_{k-1}, x_{k+1} \in E_{k+1}, \dots . x_n \in E_n$ fixés l'application<br>$\varphi_k \begin{Bmatrix} E_k \to \mathbb{K} \\ x \to \varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots\ x_n) \end{Bmatrix}$ est linéaire.<br>Dans ce cas on dit que $\varphi$ est une forme $n-linéaire$. |
| **Remarque** | Dans les cas :<br>$n = 1$ on a tout simplement une forme linéaire.<br>$n = 2$ on a une forme bi-linéaire.<br>$n = 3$ on a une forme tri-linéaire. |
| **Exemples** | Le produit scalaire : $\varphi \begin{Bmatrix} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x/y \end{Bmatrix}$ et le produit matriciel $\varphi' \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (A,B) \to AB \end{Bmatrix}$ sont des formes bilinéaires. |
| **Définition** | Soient $E$ un espace vectoriel.<br>Soit $\varphi$ une forme $n$ –linéaire de $E^n$ dans $\mathbb{K}$.<br>On dit que $\varphi$ est alternée lorsque $\varphi$ s'annule sur toute famille de vecteurs dont $2$ au moins sont identiques. |
| **Propriété** | Soient $E$ un espace vectoriel.<br>Soit $\varphi$ une forme $n$ –linéaire alternée de $E^n$ dans $\mathbb{K}$.<br>$\varphi$ est nulle sur une famille liée. |

### Preuve

Soit $(x_1, x_2, \dots\ x_n)$ une famille liée de $E^n$.
$\exists x_k$ $(1 \le k \le n)$ tel que $x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i\, x_i$ avec $\forall i, \alpha_i \in \mathbb{K}$ ;

$$\varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots\ x_n) = \varphi\left( x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i\, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n \right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i\, \varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n)$$

Or dans l'expression $\varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n)$, $x_i$ est identique à un des autres $x_k$.
La forme étant alternée nous avons bien $\varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots\ x_n) = 0$

| | |
|---|---|
| **Propriété** | Soient $E$ un espace vectoriel.<br>Soit $\varphi$ une forme $n$ –linéaire alternée de $E^n$ dans $\mathbb{K}$.<br>On ne change pas la valeur prise par $\varphi$ en ajoutant à une variable de $\varphi$ une combinaison d'autres variables.<br>$\forall (x_1, x_2, \dots\ x_n) \in E^n, \varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots\ x_n) = \varphi\left( x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i\, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n \right)$ |

### Preuve

$$\varphi\left( x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i\, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n \right) = \varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots\ x_n) + \varphi\left( x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i\, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n \right)$$

$$= \varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots\ x_n) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i\, \varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots\ x_n)$$

Car là encore dans l'expression $\varphi(x_1, x_2, \dots\ x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \dots\ x_n), x_i$ désigne un des autres $x_k$

| | |
|---|---|
| **Propriété** | Soient $E$ un espace vectoriel.<br>Soit $\varphi$ une forme $n$ –linéaire alternée de $E^n$ dans $\mathbb{K}$.<br>$\varphi(x_1, \dots\ x_i, \dots, x_j, \dots\ x_n) = -\varphi(x_1, \dots\ x_j, \dots, x_i, \dots\ x_n)$<br>L'inversion de deux variables fait apparaître un signe $-$ .<br>On dit que $\varphi$ est antisymétrique. |

### Preuve

$$\varphi(x_1, \dots\ x_i, \dots, x_j, \dots\ x_n) + \varphi(x_1, \dots\ x_j, \dots, x_i, \dots\ x_n) = \varphi(x_1, \dots\ , x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots\ x_n) = 0$$

car deux vecteurs de la famille sont identiques.