Image d'un sev.

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ −ev.
Soit f une application linéaire de E dans F
Soit A un sev de E. Soit B un sev de F

- L'image de A est aussi un sev noté $f(A)$.
- L'image réciproque de B : $\{x \in A \ tq \ f(x) \in B\}$ est aussi un sev noté $f^{-1}(B)$.

Preuve

- $f(A)$ est non vide. En effet $0_F = f(0_E)$ avec $0_E \in A$ Donc $0_F \in f(A)$
  $\forall (x,y) \in \ f(A)^2, \exists (x',y') \in A \ tq \ x = f(x')$ et $y = f(y')$.
  $\forall (\lambda,\mu) \in \ \mathbb{K}^2 \ \ \lambda x + \ \mu y = \lambda f(x') + \ \mu f(y') = f(\lambda x' + \ \mu y')$ donc $\lambda x + \ \mu y \in f(A)$ car $\lambda x' + \ \mu y' \in A$. $(A \ sev)$
  Il vient $f(A)$ sev
- $f^{-1}(B)$ est non vide. En effet $0_F = f(0_E)$ avec $0_F \in B$. Donc $0_E \in f^{-1}(B)$
  $\forall (x,y) \in \ \ f^{-1}(B)^2, \exists (x',y') \in B \ \ tq \ x' = f(x)$ et $y' = f(y)$
  $\forall (\lambda,\mu) \in \ \mathbb{K}^2 \ \ f(\lambda x + \ \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda x' + \mu \, y'$. $\lambda x' + \mu \, y' \in B$ car B sev donc $\lambda x + \ \mu y \in f^{-1}(B)$

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ −ev.
Soit f une application linéaire de E dans F

- $f(E)$ est un sev noté Imf. On l'appelle l'image de f.
- $f^{-1}(0_F)$ est un sev noté $Kerf$. On l'appelle le noyau de f

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ −ev.
Soit f une application linéaire de E dans F.

- f est injective $ssi \ Kerf = \{0_E\}$
- f est surjective $ssi \ Imf = F$

Preuve

- Supposons f est injective
  Soit $x \in Kerf$.
  $f(x) = 0_F \Rightarrow \ f(x) = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$. Donc $Kerf \subset \{0_E\} \Rightarrow Kerf = \{0_E\}$
  Supposons $Kerf = \{0_E\}$
  Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$
  $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0_F \Rightarrow \ f(x-y) = 0_F \Rightarrow x - y \in Kerf \Rightarrow \ x - y = 0_E \Rightarrow x = y$. Donc f injective.
- Supposons f est surjective
  Nous savons déjà que $Imf \subset \ F$. Soit $y \in \ F$. $\exists x \in E \ tq \ y = f(x)$. Donc $y \in Imf$. $F \subset Imf$ donc $F = \ Imf$
  Supposons $Imf = F$
  $y \in \ F \Rightarrow y \in \ Imf \Rightarrow \exists x \in E \ tq \ y = f(x)$. Donc f surjective.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$

On définit f une application linéaire de E dans F par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'+y' \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Donc f linéaire.

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_F \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ Kerf = \{0_E\}$ Donc f injective.

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ −ev.
Soit X une partie de E.
Soit f une application linéaire de E dans F

$$\boldsymbol{f(Vect\ X) = Vect(\ f(X))}$$

Preuve

Soit $x \in \ Vect\ X$. $x = \sum_{i \in I} \lambda_i \, x_i$ avec $\forall i \ x_i \in \ X$
$f(x) = f(\sum_{i \in I} \lambda_i \, x_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i \, f(x_i)$. Donc $f(x) \in \ Vect\big(\ f(X)\big) \Rightarrow \ f(Vect\ X) \subset Vect\big(\ f(X)\big)$
Soit $x \in \ Vect\ \big(f(X)\big)$. $x = \sum_{i \in J} \lambda_i \, y_i$ avec $\forall i \ y_i \in \ f(X)$. Donc $\forall i \ \exists x_i \in X \ tq \ y_i = f(x_i)$

$$x = \sum_{i \in J} \lambda_i \, y_i = \sum_{i \in J} \lambda_i \, f(x_i) = \sum_{i \in J} f(\lambda_i x_i) = f(\sum_{i \in J} \lambda_i x_i) \ \Rightarrow x \in \ f(Vect\ X) \Rightarrow \ Vect\ \big(f(X)\big) \subset f(Vect\ X)$$

Il vient

$$\boldsymbol{f(Vect\ X) = Vect(\ f(X))}$$

Conséquence	Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. $$Im\ f = Vect\ ((f(x_i))_{i\in I}$$
Définition	Soient E et F deux $\mathbb{K}$ –ev et f application linéaire de E dans F On dit que f est de rang fini si Imf est de dimension finie. Dans ce cas le rang de f est égal à $\dim\,(imf)$ et se note $rg(f)$
Théorème	Soient E et F deux $\mathbb{K}$ –ev et f application linéaire de E dans F. • Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $rg(f) \leq \dim F$ avec égalité si f surjective. • Si E est de dimension finie, f est de rang fini et $rg(f) \leq \dim E$ avec égalité si f injective.

Preuve

- $Im(f)$ est un sev de F. Donc $\dim\big(Im(f)\big) \leq \dim F$. Le rang de f est donc fini. Si f surjective alors $Im(f) = F$ et on a bien $\dim\big(Im(f)\big) = \dim F$
- Supposons E de dimension finie. Soit $e_1, e_2 \dots e_n$ une base de E. $Imf = Vect\ \big(f(e_1), \dots f(e_n)\big)$
  $Vect\ \big(f(e_1), \dots f(e_n)\big)$ est de dimension finie car engendré par un nombre fini de vecteurs. Nous avons donc $\dim\big(Im(f)\big) \leq n$, $\dim\big(Im(f)\big) \leq \dim\,(E)$. Si f injective alors $f(e_1), \dots f(e_n)$ libre. En effet $\lambda_1\, f(e_1) + \cdots \lambda_n f(e_n) = 0 \Rightarrow\ f(\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n = 0$ car f injective $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_n = 0$ car la famille des e_i est libre
  Or $f(e_1), \dots f(e_n)$ est aussi génératrice de $Vect\ \big(f(e_1), \dots f(e_n)\big)$ nous en déduisons que c'est une base de $Vect\ \big(f(e_1), \dots f(e_n)\big) = Im(f)$. Nous avons bien $\dim\big(Im(f)\big) = \dim E$

Propriété	Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ –ev de dimension finie. Soit u une application linéaire de E dans F Soit v une application linéaire de F dans G Alors $rg(v\ o\ u) \leq \min\,(rg(u), rg(v))$

Preuve

Les espaces vectoriels sont de dimension finie donc les rang seront aussi finis.
Considérons vou. u envoie E sur $u(E)$ et v envoie $u(E)$ sur $v\ o\ u(E)$.
Soit v' la restriction de v à $u(E)$.
Nous avons $rg(v\ o\ u) = \dim\big(\ v\ o\ u(E)\big) = \dim\big(\ v'o\ u(E)\big) = \mathrm{rg}\big(\ v'o\ u(E)\big)$
Or d'après le théorème précédent appliqué à v', $\mathrm{rg}\big(\ v'o\ u(E)\big) \leq \dim\big(u(E)\big)$ mais $\dim\big(u(E)\big) = rg(u)$ donc

$$rg(v\ o\ u) \leq rg(u)$$

$v\ o\ u(E) \subset v\ (F)$ car $u(E) \subset F$ donc $\dim\big(\ v\ o\ u(E)\big) \leq \dim\,(v(F))\ \Rightarrow\ rg(v\ o\ u) \leq rg(v)$
Il vient :

$$rg(v\ o\ u) \leq \min\,(rg(u), rg(v))$$

Propriété	Soient E et F deux $\mathbb{K}$ –ev de dimension finie. Soit u un isomorphisme de E dans F. Alors $\dim(E) = \dim\,(F)$

Preuve

u est un isomorphisme. Il est donc injectif et surjectif. D'après le théorème précédent nous avons donc

$$rg(u) = \dim(E) = \dim\,(F)$$

Propriété	Soient E et F deux $\mathbb{K}$ –ev de même dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective

Preuve

D'après le théorème précédent, si f injective, nous avons $rg(f) = \dim E = \dim F$. Donc Imf sev de F de même dimension que F est égal à F. $Imf = F \Rightarrow f$ surjective. f étant injective et surjective elle est bijective.
Réciproquement, supposons f bijective. Elle est alors surjective. Nous avons donc $Imf = F$. $\dim Imf = \dim F = dimE$.
Supposons f non injective. Il existe x non nul dans E tel que $f(x) = 0$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base B de E dont le premier vecteur est x. $Imf = Vect\big(f(B)\big)$. Or $\dim Vect\big(f(B)\big) \leq |B| - 1$. En effet un des vecteurs de B a son image nulle. Nous avons donc $\dim Imf \leq dimE - 1$ ce qui est une contradiction puisque nous savons que $\dim Imf = \dim E$. f est donc bien injective.
Nous avons bien :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$