Détermination d'une application linéaire	
Rappels	Nous avons au premier semestre déjà étudié l'ensemble des matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous allons dans ce chapitre établir un lien entre ces matrices et les applications linéaires en dimension finie.
Théorème	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Les $E_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ en consituent une base.

Preuve

Nous rappelons ici que les $E_{i,j}$ sont des matrice n, p constituées de 0 sur leurs n lignes et p colonnes sauf à l'intersection de leurs i-ième ligne et j-ième colonne où réside un 1.
Il est immédiat que la famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq p}$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous avons donc

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = Vect\left[(E_{i,j})_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq p}\right]$$

Propriété	$\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ (Il suffit de compter les $E_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$)
Définition	Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $B = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$. On appelle matrice colonne de x dans B ou plus simplement matrice du vecteur x la matrice $(n, 1)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ constituée des n coordonnées de x dans B.
Remarques	• Une matrice colonne est souvent symbolisée par une lettre capitale, le vecteur etant symbolisé par une lettre minuscule. La matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ représente les coordonnées du vecteur x. • Une matrice (n, p) peut donc être vue comme la juxtaposition horizontale de p matrices colonnes $(n, 1)$ et donc comme l'expression des coordonnées de p vecteurs dans une base constituée de n vecteurs.
Exemple	La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ peut être vue comme l'expression des coordonnées de $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
Définition	Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev de dimension p et n. Soient $B_E = (e_1, e_2, \dots\, e_p)$ et $B_F = (u_1, u_2, \dots\, u_n)$ deux bases de E et F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose que $\forall j \in [\![1, p]\!]$ $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, u_i$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. On appelle matrice de f relativement aux bases B_E et B_F la matrice $F = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ Nous avons donc $Mat_{B_E,B_F}(f) = Mat_{B_F}(f(e_1), f(e_2)\, \dots, f(e_p)) = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$
Exemple	Considérons f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $E = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $U = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ peut être vue comme la matrice relativement aux bases E et U de l'application linéaire f de E dans F définie par : $\left\{\begin{matrix} f(e_1) = u_1 + 2u_2 + 3u_3 \\ f(e_2) = 4u_1 + 5u_2 + 6u_3 \end{matrix}\right\}.$
Définition	Soit F une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. F peut être vue comme la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$. Dans ce cas on dit que f est l'application linéaire **canoniquement** associée à F.
Exemple	La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ peut être vue aussi comme la matrice d'une application linéaire allant de $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ vers $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$. Cette application est dite **canoniquement** associée à $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarque

Nous avons vu qu'une application linéaire entre deux ev de dimensions finie E et F était entièrement déterminée par l'image d'une base de E. Une application linéaire de E dans F est donc entièrement définie par la matrice donnant l'image d'une base de E dans une base de F.

Propriétés

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev de dimension p et n de bases B_E et B_F.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et f l'application linéaire associée à A dans les bases B_E et B_F.
Soit u un vecteur de E et U la matrice colonne de ses coordonnées dans B_E

Alors le vecteur $f(u)$ a pour matrice colonne AU dans B_F

Preuve

Soient $B_E = (e_1, e_2, \dots\ e_p)$ et $B_F = (u_1, u_2, \dots\ u_n)$ deux bases de E et F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ l' application linéaire entre E et F correspondant à $A = \left((a_{i,j})\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$

Soit x le vecteur de E de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans E

Nous avons $f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\, e_k\right) = \sum_{j=1}^{p} f(x_j\, e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j\, f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i\right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_j a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_j a_{i,j}\ u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{i,j}\right) u_i$.

Donc la k-ième coordonnée de $f(x)$ est $\sum_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j$. La matrice colonne relative à $f(x)$ dans F est bien AX

Exemple

Considérons f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $E = (e_1, e_2)$ une base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $U = (u_1, u_2, u_3)$ une base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire de E dans F. Soit $x \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur de E (dans la base canonique) . Alors le vecteur $f(x)$ aura pour coordonnées dans la base canonique de F: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$

Théorème

Soient E et F deux ev de dimensions finie, de dimensions respectives p et n. $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}$ sont isomorphes.

Preuve

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}$ sont des espaces vectoriels.
Considérons :
$B_E = (e_1, e_2, \dots\ e_p)$ une base de E et $B_F = (u_1, u_2, \dots\ u_n)$ une base de F.

Soit $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}$
$\qquad f \to Mat_{B_E,B_F}(f)$

Il est aisé de démontrer que f est linéaire. f est évidemment injective puisque la seule application ayant une matrice nulle est l'application nulle et enfin f est surjective puisqu'à chaque matrice il est possible de faire correspondre une application linéaire.

Remarque

Grâce à ce théorème nous allons pouvoir dorénavant travailler indifféremment sur les applications linéaires ou leurs matrices. Toute propriété valable dans le monde des applications linéaires sera valable dans le monde des matrices et inersement.

Propriété

Soient E et F deux ev de dimensions finie.

$$\mathcal{L}(E,F) = \dim E * \dim F$$

Preuve

Nous savons que $\mathcal{M}_{n,p}$ est de dimension finie et que $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}\right) = np = \dim E * \dim F$.
L'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}$ nous garantit que $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi de dimension finie de même dimension.

Donc $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mathcal{L}(E,F)}) = \mathbf{dim}\, \boldsymbol{E} * \mathbf{dim}\, \boldsymbol{F}$.

Remarque

Dans le cas particulier des endomporphismes d'un espace vectoriel de dimension n, nous avons en appelant $B = (e_1, e_2, \dots\ e_n)$ une base de E :

- $Mat_{B_E}(f) = Mat_{B_E}(f(e_1), f(e_2)\ \dots, f(e_n)) = \left((a_{i,j})\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$
- $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n$ qui sont isomorphes.
- $dim\, \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$

Propriété

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finies. Soient B_E, B_F et B_G trois bases de ces espaces vectoriels. Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications linéaires.

$$Mat_{B_E,B_G}(g\ o\ f) = Mat_{B_F,B_G}(g) * Mat_{B_E,B_F}(f)$$

Preuve

Soient m, n et p les dimensions respectives de E, F, G.
$B_E = (e_1, e_2, \dots e_m)$; $B_F = (u_1, u_2, \dots u_n)$; $B_G = (t_1, t_2, \dots t_p)$;
Nous avons $Mat_{B_F,B_G}(g) = \left((g_{i,j})\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ et $Mat_{B_E,B_F}(f) = \left((f_{i,j})\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$

Soit e_i avec $1 \leq i \leq m$ un vecteur de E

$$g\ o\ f(e_j) = g\left(\sum_{k=1}^{n} f_{k,j}\, u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_{k,j}\, g(u_k) = \sum_{k=1}^{n} f_{k,j} \sum_{l=1}^{p} g_{l,k}\, t_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} g_{l,k}\, f_{k,j} t_l = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} g_{l,k} f_{k,j}\, t_l = \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} g_{l,k} f_{k,j}\right) t_l$$

Donc en posant $Mat_{B_E,B_G}(g\ o\ f) = \left((h_{i,j})\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq m}}$, nous avons $h_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} g_{i,k} f_{k,j}$.

Nous avons bien :

$$Mat_{B_E,B_G}(g\ o\ f) = Mat_{B_F,B_G}(g) * Mat_{B_E,B_F}(f)$$

Propriété	Soient E et F deux ev de même dimensions finie n. Soit f une application linéaire de E dans F et soit F sa matrice dans les bases E et F f isomorphisme ssi F inversible

Preuve

f isomorphisme $\Rightarrow \exists g$ application linéaire telle que $g = f^{-1}$. Soit G la matrice de g dans les bases de E et F.

$fg = Id_E \Rightarrow FG = I_n$ (d'après la propostion précédente)

$gf = Id_F \Rightarrow GF = I_n$ (d'après la propostion précédente)

Nous avons donc $FG = GF = I_n$ ce qui nous amène à F inversible d'inverse G.
Réciproquement. Supposons F inversible d'inverse G. Soit g l'application linéaire de F dans E reliée à G.
Nous avons $\forall x \in E$ de matrice X $(GF)X = X$.
De même $\forall y \in F$ de matrice Y $(FG)Y = Y$.
Nous en déduisons que $\forall x \in E$ $\ g\ o\ f\ (x) = x$ et $\forall y \in F$, $f\ o\ g\ (y) = y$
f admet donc une application linéaire réciproque g. f est bien un isomorphisme.