

Systèmes, matrices, applications linéaires.

Remarque	Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. - L'ensemble S des solutions du système homogène $AX = 0_{\mathbb{K}^n}$ est un sous ensemble de $\mathbb{K}^p$ et coïncide avec $\text{Ker}(A)$. Nous avons donc $\dim(S) = \dim \text{Ker}(A)$ - Le théorème du rang nous donne $\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = p \Rightarrow \text{rg}(A) = p - \dim(S)$ - Le système non homogène $AX = B$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ n'admet de solutions que si $B \in \text{Im}(A)$
Propriété	L'ensemble des solutions d'un système non homogène du type $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \text{Im}(A)$ est un sous espace affine.
Preuve	
Soit S l'ensemble de solutions. Nous avons vu que si $B \notin \text{Im}(A)$ alors $S = \emptyset$ Si $B \in \text{Im}(A)$ alors $\exists X_0 \in \mathbb{K}^p$ tel que $AX_0 = B$ Soit X une solution du système. Nous avons $AX_0 = B$ et $AX = B$ Donc $A(X - X_0) = 0 \Rightarrow X - X_0 \in \text{Ker}A$ Donc $S \subset X_0 + \text{Ker}A$ Réciproquement si $X = X_0 + Y$ avec $Y \in \text{Ker}A$ nous avons $AX = A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = B + 0 = B$ Donc $X \in S$. Nous avons bien $S = X_0 + \text{Ker}A$	
Exemple	Nous avons déjà vu dans le chapitre sur les espaces affines que les solutions du système : $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - t = 0 \\ x - y + 3z - t = 2 \\ x - y + z - 4t = 0 \end{cases}$ Sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ étant ici représenté par $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
Définition	Dans le cas où A est inversible le système $AX = B$ est dit système de Cramer.
Propriété	Un système de Cramer admet une solution unique.
Preuve	
$AX = B$ ssi $X = A^{-1}B$	
Remarque	Résoudre un système de Cramer en inversant une matrice n'est pas toujours la solution la plus aisée. Il est des fois plus confortable de faire les choses manuellement