Matrices de passage

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espace vectoriels de dimension p et n.
Soit f une application linéaire de E dans F de rang r.
Alors il existe une base B_1 de E et une base B_2 de E telle que :

$$Mat_{B_1,B_2}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & \mathcal{O}_{r,p-r} \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Preuve

Nous savons d'après le théorème du rang que $\dim Kerf + \dim Imf = n \Rightarrow \dim Kerf = p - r$
Soit $B_3 = (g_1, g_2, \dots g_{p-r})$ une base de $Kerf$.
Soit S un suplémentaire de $Kerf$ dans E. $\dim(S) = p - (p - r) = r$
Soit $B_4 = (e_1, e_2, \dots e_r)$ une base de S. La concaténation de B_4 et B_3 nous donne B_5 qui est une base de E.
Considérons $f_1 = f(e_1), f_2 = f(e_r), \dots f_r = f(e_r)$. Nous avons $Im\, f = Vect\,(f(e_1), f(e_2), \dots f(e_r))$.
$f(e_1), f(e_2), \dots f(e_r)$ est une famille libre.
En effet, supposons que $\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \cdots \alpha_r f(e_r) = 0 \Rightarrow f(\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_r e_r) = 0 \Rightarrow \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_r e_r \in Ker\, f$.
Or $\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_r e_r \in S$ aussi. S et $Ker\, f$ étant en somme directe nous avons $\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_r e_r = 0$
Les e_i formant une famille libre nous avons $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_r = 0$. Conclusion $f(e_1), f(e_2), \dots f(e_r)$ est une famille libre.
Complétons là grâce au théorème de la base incomplète pour obtenir B_6 une base de F.

$$Mat_{B_5,B_6}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & \mathcal{O}_{r,p-r} \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Définition

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On dit que A est équivalente à B lorsqu'il existe P une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ et Q une matrice de $GL_p(\mathbb{K})$ telles que : $A = P^{-1}BQ$

Propriété

La relation est « être équivalent à » est une relation d'équivalence.

Preuve

- Elle est réflexive. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A = I_n\, A\, I_p$ donc A est équivalente à A
- Elle est symétrique. Si $\exists (P, Q)$ tel que $A = P^{-1}BQ$ alors $B = PAQ^{-1}$
- Elle est transitive. Si $\exists (P, Q)$ tel que $A = P^{-1}BQ$ et $\exists (P', Q')$ tel que $B = P'^{-1}CQ'$
  Alors $A = P^{-1}BQ = P^{-1}P'^{-1}CQ'Q = (P'P)^{-1}C(Q'Q)$

Exemples

- Nous avons vu que si f est une applications linéaires de E dans F, ev de dim finie.
  Si E_1 *et* E_2 sont deux bases de E.
  Soient F_1 *et* F_2 deux bases de F.
  Alors :
  $Mat_{E_1,F_1}(f)$ est équivalente à $Mat_{E_2,F_2}(f)$
- Si B est obtenue à partir de A à partir d'opérations élémentaires (c'est-à-dire à partir de multiplications à droite ou à gauche par des matrices inversibles) alors B est équivalente à A

Propriété

Toute matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de rang r est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & \mathcal{O}_{r,p-r} \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$

Preuve

Soit $F \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à F.
Nous venons de voir qu'il existe une base B de E et une base B' de F telles que :

$$Mat_{B_5,B_6}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & \mathcal{O}_{r,p-r} \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Cela signifie qu'il existe une matrice de passage P et une matrice de passage Q telles que :

$$P^{-1}FQ = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & \mathcal{O}_{r,p-r} \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Propriété

Deux matrices équivalentes ont le même rang.

Preuve

Nous avons vu que multiplier à gauche ou à droite une matrice par une matrice inversible conserve son rang. La preuve de cette propriété en découle directement.	
Théorème	Le rang d'une matrice est invariant par transposition.
Preuve	
Supposons $rg(A) = r$. Nous venons de montrer qu'il existe une matrice P et une matrice Q inversibles telles que : $$J_r = P^{-1}AQ \Rightarrow PJ_rQ^{-1} = A \Rightarrow \ {}^tA = \ {}^t(Q^{-1})\ {}^t(PJ_r) = (\ {}^tQ)^{-1}\ {}^tJ_r\ \ {}^tP$$ ${}^tA$ est donc équivalente à ${}^tJ_r$ ${}^tJ_r$ est une matrice possédant r 1 sur sa diagonale et des 0 partout ailleurs. Nous en déduisons que $rg\left(\ {}^tJ_r\right) = r$ ${}^tA$ étant équivalente à ${}^tJ_r$ nous avons $rg\left(\ {}^tA\right) = r$	
Théorème	Le rang de A est la taille maximale des matrices extraites inversibles qu'on peut extraire de A
Preuve	
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r Nous avons déjà vu que si B est extraite de A alors $rg(A) \geq rg(B)$ Nous savons que pour une matrice extraite inversible, son rang est égal à sa dimension. Nous en déduisons que la dimension maximale d'une matrice inversible extraite de A est r. Une question subsiste : Est-il possible de trouver une telle matrice ? $rg(A) = r$ donc il existe r vecteurs colonnes de A linéairement indépendants. En supprimant de A tous les autres vecteurs colonnes on obtient une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. ${}^tC$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ de rang r. Donc il existe r vecteurs colonnes de r linéairement indépendants. Supprimons de ${}^tC$ tous les autres vecteurs colonnes nous obtenons D une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{K})$ de rang r. Sa transposée ${}^tD$ est aussi de taille r x r, aussi de rang r et est une matrice extraite de A. Nous en déduisons que D est inversible. Nous avons bien trouvé une matrice extraite de A inversible et de rang r.	