Matrices de passage

Définition	Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soient B_1 et B_2 deux bases de E . On appelle matrice de passage de B_1 à B_2 la matrice $P = Mat_{B_1}(B_2) = Mat_{B_2, B_1}(Id_E)$
Exemple	Soit $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient les vecteurs u_1, u_2, u_3 dont les coordonnées dans B_1 sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs constituent une base B_2 de $\mathbb{R}^3$. (Vérifier le côté libre et générateur). La matrice de passage de B_1 à B_2 est la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Propriété	Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soient B_1, B_2, B_3 trois bases de E . Soit P_1 la matrice de passage de B_1 à B_2 ; $P_1 = Mat_{B_2, B_1}(Id_E)$ Soit P_2 la matrice de passage de B_2 à B_3 ; $P_2 = Mat_{B_3, B_2}(Id_E)$ Soit P_3 la matrice de passage de B_1 à B_3 ; $P_3 = Mat_{B_3, B_1}(Id_E)$ Alors $P_3 = P_1 P_2$

Preuve

Nous avons déjà montré dans le cadre d'un espace vectoriel E muni de trois bases B_E, B_F, B_G et de deux applications linéaires $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ que :

$$Mat_{B_E, B_G}(g \circ f) = Mat_{B_F, B_G}(g) * Mat_{B_E, B_F}(f) \text{ (Voire lien matrices applications linéaires)}$$

Donc dans notre cas particulier :

$$P_1 P_2 = Mat_{B_2, B_1}(Id_E) Mat_{B_3, B_2}(Id_E) = Mat_{B_3, B_1}(Id_E) = P_3$$

Propriété	Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soient B_1 et B_2 deux bases de E . Soit P_1 la matrice de passage de B_1 à B_2 Soit P_2 la matrice de passage de B_2 à B_1 Alors P_1 inversible et $P_1^{-1} = P_2$
------------------	--

Preuve

Supposons E de dimension n .

Remarquons que :

$$P_1 P_2 = Mat_{B_2, B_1}(Id_E) Mat_{B_1, B_2}(Id_E) = Mat_{B_1, B_1}(Id_E) = I_n ;$$

$$P_2 P_1 = Mat_{B_1, B_2}(Id_E) Mat_{B_2, B_1}(Id_E) = Mat_{B_2, B_2}(Id_E) = I_n ;$$

$$\text{Donc } P_2 = P_1^{-1}$$

Propriété	Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soient B_1 et B_2 deux bases de E . Soit X la matrice colonne d'un vecteur dans B_1 Soit X' la matrice colonne du même vecteur dans B_2 Soit P la matrice de passage de B_1 à B_2 Alors $X = P X'$
------------------	---

Preuve

Soit x le vecteur de coordonnées X dans B_1 et X' dans B_2 .

$$x = Id_E(x)$$

En exprimant cette égalité matriciellement dans la base B_1 il vient :

$$X = Mat_{B_2, B_1}(Id_E)(X') = P X'$$

Exemple	Parmi les changements de base il en est un célèbre dans le plan, c'est le passage en coordonnées polaire. B_1 : La base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est remplacée par la base B_2 deux vecteurs : $u_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ et $v_\theta = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ La matrice de passage de B_1 à B_2 est $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ La matrice inverse de B_2 à B_1 est $P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ Soit x un vecteur du plan dont les coordonnées dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Les coordonnées de x dans la base polaire sont $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}$ Donc $\begin{cases} a' = a \cos \theta + b \sin \theta \\ b' = -a \sin \theta + b \cos \theta \end{cases}$
----------------	--

Propriété	<p>Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux bases de E. Soient F_1 et F_2 deux bases de F. Soit P la matrice de passage de E_1 à E_2 Soit Q la matrice de passage de F_1 à F_2 Soit g une application linéaire de E dans F Soit $G = \text{Mat}_{E_1, F_1}(g)$ la matrice de g dans les bases E_1 et F_1 Soit $H = \text{Mat}_{E_2, F_2}(g)$ la matrice de g dans les bases E_2 et F_2 Alors $H = Q^{-1}GP$</p>
Preuve	
<p>Soit $x \in E$ et $y = g(x)$ avec bien sur $y \in F$ Exprimons cette égalité vectoriellement dans les bases E_1 et F_1 Il vient $Y = GX$ Soient Y' et X' les matrices colonnes de x et y dans les bases E_2 et F_2 $X = PX'$ et $Y = QY'$. Donc $QY' = GPX' \Rightarrow Y' = Q^{-1}GPX'$</p> <p>$Q^{-1}GP$ est bien la matrice H, la matrice de g dans les bases E_2 et F_2</p>	
Propriété	<p>Dans le cas particulier d'un endomorphisme : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux bases de E. Soit P la matrice de passage de E_1 à E_2 Soit g un endomorphisme de E Soit $G = \text{Mat}_{E_1, E_1}(g)$ la matrice de g dans la base E_1 Soit $H = \text{Mat}_{E_2, E_2}(g)$ la matrice de g dans la bases E_2 Alors $H = P^{-1}GP$</p>
Preuve	
Il suffit dans la preuve précédente de remplacer Q par P .	
Exemple	<p>Soit B_1 la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Faisons la tourner de $\frac{\pi}{4}$ dans le sens direct. Nous obtenons les vecteurs $u_{\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} e_1 + \sin \frac{\pi}{4} e_2$ et $v_{\frac{\pi}{4}} = -\sin \frac{\pi}{4} e_1 + \cos \frac{\pi}{4} e_2$ Soit $u_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $v_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; La matrice de passage étant $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ Considérons maintenant dans cette nouvelle base la symétrie vectorielle (endomorphisme de $\mathbb{R}^2$) dont la matrice est $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; Cette symétrie peut être vue comme la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ Soit G La matrice de cette symétrie dans la base canonique. Elle est liée à H par $H = P^{-1}GP$ Cela implique $G = PHP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Nous retrouvons la propriété suivante : toute symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ inverse les coordonnées.</p>