Matrices de passage

Définition	Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$
Théorème	Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. Soient B et B' deux matrices de E. Alors $Mat_B(u)$ et $Mat_{B'}(u)$ sont semblables.

Preuve

Soient x et y deux vecteurs de E reliés par $y = u(x)$.
Soient X et Y les vecteurs colonnes de coordonnées de x et y exprimées dans la base B.
La relation matricielle s'écrit $Y = Mat_B(u)X$
Soit P la matrice de passage passant de B à B'
Nous avons $X = PX'$, et $Y = PY'$. X' et Y' étant les vecteurs colonnes de coordonnées de x et y exprimées dans la base B'.

$$Y = Mat_B(u)X \Leftrightarrow PY' = Mat_B(u)PX' \Leftrightarrow Y' = P^{-1}Mat_B(u)PX'$$

Nous avons bien $Mat_{B'}(u) = P^{-1}Mat_B(u)P$ ce qui nous prouve que les deux matrices sont semblables.

Théorème	La relation « être semblable à » est une relation d'équivalence.

Preuve

La preuve suit exactement la même mécanique que celle utilisée pour montrer que la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence

Théorème	Deux matrices semblables ont même rang et même trace.

Preuve

Deux matrices semblables sont deux matrices équivalentes. Elles ont donc même rang.
Soit $B = P^{-1}AP$.

$$Tr(B) = Tr(P^{-1}AP) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A).$$

Deux matrices semblables ont donc le même rang.

Définition	Nous avons vu que les matrices d'un même endomorphisme u exprimées dans des bases différentes sont semblables. Elles ont donc même trace. Cette trace commune est appelée trace de l'endomorphisme et est notée $Tr(u)$
Théorème	La trace appliquée à l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel est une forme linéaire commutative. Soient u et v deux endomorphismes de E. $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, Tr(\lambda u + \mu v) = \lambda Tr(u) + \mu Tr(v)$ $Tr(uv) = Tr(vu)$

Preuve

La linéarité et la commtutativité ont été montrées matriciellement dans le chapitre du premier semestre correspondant aux matrices. La transposition dans l'espace des endomorphismes est immédiate.

Lemme	Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n. Soient F et G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$. On suppose $dimF = r$ et $dimE = n - r$ Soit B une base adaptée à F et G. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Soit s la symétrie par rapport à F parallélement à G. Alors : $Mat_B(p) = \begin{pmatrix} I_{r,r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ $\quad Mat_B(s) = \begin{pmatrix} I_{r,r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$

Preuve

Par définition : $\forall x \in F, p(x) = x$ et $\forall x \in G, p(x) = 0$ et $\forall x \in F, s(x) = x$ et $\forall x \in G, s(x) = -x$

Théorème	Soit p un projecteur. $Tr(p) = Rg(p)$

Preuve

Il suffit de déterminer la trace dans la base utilisée lors du lemme précédent.