

Détermination d'une application linéaire

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A .
On appelle noyau de A et on note $\text{Ker}(A)$ le noyau de f

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$
 $\text{Ker } A$ est l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices colonnes X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifient $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Soit $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un de ces vecteurs :
Nous avons $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 8y + 12z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$
Donc en posant $u \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ il vient $\text{Ker } A = \text{Vect } u$

Remarque

Les lignes de A représentent les équations du système linéaire homogène dont $\text{Ker } A$ est solution.

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A .
On appelle Image de A et on note $\text{Im}(A)$ le sev noté $\text{Im}(f)$

Exemple

Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A .
Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une base canonique de $\mathbb{R}^4$
Nous avons $\text{Im}(A) = \text{Im}(f) = \text{Vect}[f(e_1), f(e_2), f(e_3)]$.
Avec $f(e_1) = u_1 + 4u_2 + 2u_3 - u_4$; $f(e_2) = 2u_1 + 8u_2 + 4u_3 + 2u_4$; $f(e_3) = 3u_1 + 12u_2 + 6u_3 + 3u_4$
Remarquons que $f(e_3) = \frac{3}{2} f(e_2)$; Il vient $\text{Im}(A) = \text{Vect}[f(e_1), f(e_2)]$
Les deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas colinéaires. Ils constituent donc une famille libre.
Nous avons bien $f(e_1), f(e_2)$ base de $\text{Im}(A)$
Remarquons que $\dim(\text{Im}A) = 2$; $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$; $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$; le théorème du rang est donc bien respecté.

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A .
On appelle rang de A et on note $\text{Rg}(A)$ le rang de l'application linéaire f .

Exemple

Toujours avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ nous avons $\text{Rg}(A) = \dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Vect}[f(e_1), f(e_2)]) = 2$

Remarque

Le rang d'une matrice est la dimension du sev généré par ses vecteurs colonnes.

Propriété

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 $\text{Rg}(A) \leq \min(n, p)$

Preuve

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A .
 $\text{Im}f \subset \mathbb{R}^n$ donc $\text{Rg}(A) \leq n$
Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. $\text{Im}f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.
Donc $\dim(\text{Im}f) \leq p$ (égalité si $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$ famille libre).
Nous avons bien
 $\text{Rg}(A) \leq \min(n, p)$

Propriété

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 A inversible ssi $\text{rg}(A) = n$

Preuve

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A .
 f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$
 A inversible $\Leftrightarrow f$ automorphisme $\Leftrightarrow \dim(\text{im}f) = n \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

Propriété	Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A inversible ssi A inversible à gauche ou à droite.
Preuve	
Bien entendu si A inversible alors A inversible à gauche ou à droite. Si A inversible à gauche alors $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$ Soit b, a, g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à B, A, BA Nous avons $BA = I_n \Rightarrow \text{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ Or $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(g)$ donc $\text{Ker}(a) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Rightarrow a$ injectif $\Rightarrow a$ bijectif (dimension finie) $\Rightarrow A$ inversible. Le même raisonnement s'applique si A inversible à droite.	
Théorème	Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Multiplier A à droite ou à gauche par une matrice inversible conserve son rang.
Preuve	
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Soit t l'endomorphisme canoniquement associé à T et f l'application linéaire canoniquement associée à A. Nous avons $rg(TA) = \dim(\text{Im}(t \circ f))$ $\dim(\text{Im}(t \circ f)) = \dim(\text{Im}(t _{\text{Im}f}))$ Or t étant bijectif $\dim(\text{Im}(t _{\text{Im}f})) = \dim(\text{Im}f)$ Donc $rg(TA) = \dim(\text{Im}f) = rg(A)$. Soit $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversible. Soit p l'endomorphisme canoniquement associé à P et f l'application linéaire canoniquement associée à A. Nous avons $rg(AP) = \dim(\text{Im}(f \circ p))$ $\dim(\text{Im}(f \circ p)) = \dim(\text{Im}(f _{\text{Im}p}))$ Or p étant bijectif $\text{Im}p = \mathbb{K}^p$ et $\dim(\text{Im}(f _{\text{Im}p})) = \dim(\text{Im}f)$ Nous avons bien : $rg(AP) = \dim(\text{Im}f) = rg(A)$.	
Théorème	Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice conserve son rang
Preuve	
Nous avons déjà vu dans le chapitre dédié aux opération élémentaires sur les matrices que : - Effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice revient à la multiplier à gauche par une matrice inversible. - Effectuer une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice revient à la multiplier à droite par une matrice inversible. Le théorème précédent conclut cette démonstration.	
Définition	Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient α et β deux entiers tels que $0 \leq \alpha \leq n - 1$ et $0 \leq \beta \leq p - 1$ Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{n-\alpha, p-\beta}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant α lignes de A et β colonnes. B est dite matrice extraite de A
Exemple	Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A obtenue en supprimant la première ligne et la deuxième colonne.
Propriété	Soit B une matrice extraite de A alors $rg(B) \leq rg(A)$
Preuve	

Considérons $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ ses vecteurs colonnes.
 Soit $B \in \mathcal{M}_{n',p'}(\mathbb{K})$ avec $1 \leq n' \leq n$ et $1 \leq p' \leq p$ une matrice extraite de A . Soient $B_1, B_2, \dots, B_{n'}$ ses vecteurs colonnes.
 Supposons $rg(B) = r$ alors il existe r vecteurs colonne de B linéairement indépendants.
 Soient $i_1, i_2, \dots, i_r$ les indices des colonnes de A correspondant à ces r vecteurs.
 Nous allons montrer que les vecteurs $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ sont linéairement indépendants.
 Considérons r scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ tels que $\alpha_1 A_{i_1} + \alpha_2 A_{i_2} + \dots + \alpha_r A_{i_r} = 0$
 Cela implique $\alpha_1 B_{i_1} + \alpha_2 B_{i_2} + \dots + \alpha_r B_{i_r} = 0$ (en effet c'est un sous système extrait du système précédent)
 Or les vecteurs $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}$ constituent par hypothèse une famille libre. Donc cela implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$
 Les vecteurs $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ sont donc bien linéairement indépendants.
 $r = \dim(\text{Vect}(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}))$ Nous avons donc $r \leq rg(A)$ ce qui implique :

$$rg(B) \leq rg(A)$$

Propriété	Soit $T = ((t_{i,j}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure). T est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
------------------	---

Preuve

Cette propriété a déjà été montrée grâce au pivot de Gauss.
 Nous allons la montrer ici, d'une autre manière.
 Soit T une matrice triangulaire supérieure. $T = ((t_{i,j}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ avec $t_{i,j} = 0$ pour $i > j$
 Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à T .
 Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Supposons T inversible.
 Nous allons supposer que $\exists t_{i,i} = 0$ avec $1 \leq i \leq n$

$$t_{i,i} = 0 \Rightarrow t(e_i) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{i-1})$$

Nous avons donc $\text{Vect}(t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_i)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{i-1})$
 Donc la famille $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_i)$ est liée et a fortiori la famille $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_n)$ aussi.
 Cela implique $\dim(\text{Im } t) < n$ ce qui est impossible puisque t est bijectif.
 Nous avons donc T inversible $\Rightarrow \forall i$ avec $1 \leq i \leq n$ $t_{i,i} \neq 0$

Réciproquement.
 Supposons que $\forall i$ avec $1 \leq i \leq n$ $t_{i,i} \neq 0$
 Nous allons montrer par récurrence sur i que pour tout $1 \leq i \leq n$, la famille $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_i)$ est libre.
 Pour $i = 1$ c'est évident. La récurrence est initialisée.
 Supposons que $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_i)$ est libre et montrons que $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_{i+1})$ est libre.
 Supposons par l'absurde $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_{i+1})$ liée. Alors $\exists j$ avec $1 \leq j \leq i+1$ tel que $t(e_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{i+1} \alpha_k t(e_k)$

Si $j = i+1$ alors $t(e_{i+1})$ combinaison linéaire de $t(e_1), \dots, t(e_i)$
 Si $j < i+1$ alors $\alpha_{i+1} \neq 0$.
 En effet cela signifierait sinon que $t(e_j)$ soit combinaison linéaire de $t(e_1), \dots, t(e_{j-1}), t(e_{j+1}), \dots, t(e_i)$ ce qui est impossible car la famille $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_i)$ est libre. Donc $\alpha_{i+1} \neq 0$. En divisant $t(e_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{i+1} \alpha_k t(e_k)$ par α_{i+1} il nous vient $t(e_{i+1})$ combinaison linéaire de $t(e_1), \dots, t(e_i)$.

Dans les deux cas nous avons donc $t(e_{i+1})$ combinaison linéaire de $t(e_1), \dots, t(e_i)$.
 $\text{Vect}[t(e_1), \dots, t(e_i)] \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$
 Or $t(e_{i+1}) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{i+1})$ mais $t(e_{i+1}) \notin \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$ car $t_{i+1,i+1} \neq 0$
 Donc $t(e_{i+1}) \notin \text{Vect}[t(e_1), \dots, t(e_i)]$. Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

Nous avons bien : pour tout $1 \leq i \leq n$, la famille $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_i)$ est libre

C'est valable pour $i = n$, Donc $t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_n)$ est libre ce qui implique $rg(t) = n \Rightarrow t$ automorphisme $\Rightarrow T$ inversible.