Sev

Définition : Soit $(E,+,\ .)$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel et F une sous partie de E. On dit que F muni des lois de E restreintes à F est un sev de E ssi F est un ev.

Théorème : Soit $(E,+,\ .)$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. F sev de E ssi $\begin{cases} F \subset E\ (1) \\ 0_E \in F\ (2) \\ \forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \ \lambda x + \mu y \in F\ (3) \end{cases}$

Preuve

(1) Nous dit que F que est une sous partie de E.
(2) Nous dit que F est non vide.
(3) Nous dit que $+$ est une loi de composition interne pour F. Elle est de plus commutative car commutative dans E
(3) Nous dit que . est une loi de composition externe pour F
$(2),(3)$ et (1) Nous disent que $(F,+)$ est un sous groupe commutatif de $(E,+)$
Les axiomes :
$\left.\begin{cases} (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x \\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y \\ (\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x) \\ 1_{\mathbb{K}}.x = x \end{cases}\right\}$ sont respectés dans F car respectés dans E
Pour toutes ces raisons F est un sev

Remarque : La propriété $\forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \ \lambda x + \mu y \in F$ se dit aussi : « F est stable par combinaison linéaire »

Propriété : Ce théorème peut aussi s'écrire :

Soit $(E,+,\ .)$ un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. F sev de E ssi $\begin{cases} F \subset E\ (1) \\ F\ non\ vide\ (2') \\ \forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \ \lambda x + \mu y \in F\ (3') \end{cases}$

Cette dernière forme est souvent plus utilisée pour démontrer que l'on a un sev

Preuve

$$\{(2')\ et\ (3')\} \Leftrightarrow \{(2)\ et\ (3)\}$$

Exemples :

- $\{0_E\}$ est un sev de E
- La droite vectorielle : $\{(x,y)\ tel\ que\ (x,y) = \lambda(x_0,y_0)\ avec\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$
- Le plan vectoriel : $\{(x,y,z)\ tel\ que\ (x,y,z) = \lambda(x_0,y_0,z_0) + \mu(x_0,y_0,z_0)\ avec\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$

Propriété : Soit I un ensemble non vide. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev d'un ev E.
Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sev de E.

Preuve

$\bigcap_{i\in I} F_i \subset E$ car chaque $F_i \subset E$
$\bigcap_{i\in I} F_i$ non vide car $\forall i\ \ 0_E \in F_i$ donc $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$
Soient x et y quelconques appartenant à $\bigcap_{i\in I} F_i$. Alors $\forall i, (x,y) \in {F_i}^2$ donc $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \lambda x + \mu y \in F_i$ (car F_i sev)
Donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} F_i$
Nous avons donc bien $\bigcap_{i\in I} F_i$ sev de E

Exercice : Soient F et G deux sev de E. Montrer que $F \cup G$ sev de E ssi $\begin{cases} F \subset G \\ ou \\ G \subset F \end{cases}$

Preuve

Remarquons que $\begin{cases} F \subset G \\ ou \\ G \subset F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \cup G = G \\ ou \\ F \cup G = F \end{cases}$. Dans les deux cas $F \cup G$ sev. Un sens de l'équivalence est donc démontré.

Supposons $F \cup G$ sev. Si $\begin{cases} F\ pas\ inclus\ dans\ G \\ et \\ G\ pas\ inclus\ dans\ F \end{cases}$ alors $\begin{cases} \exists x \in F\ mais\ x \notin G \\ et \\ \exists y \in G\ mais\ y \notin F \end{cases}$. Or x et y appartiennent à $F \cup G$ donc
$x + y \in F \cup G$ car $F \cup G$ sev.
$x + y \in F \Rightarrow y = (x+y) - x$ appartient à F ce qui est exclus par hypothèse.
$x + y \in G \Rightarrow x = (x+y) - y$ appartient à G ce qui est exclus par hypothèse.
Bref dans les deux cas nous avons une contradiction. L'hypothèse de départ $\begin{cases} F\ pas\ inclus\ dans\ G \\ et \\ G\ pas\ inclus\ dans\ F \end{cases}$ est donc exclue.

Définition	Soit A non vide une partie de E ev. L'ensemble des combinaisons linéaires de A est noté $Vect(A)$. $$Vect(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \quad \text{où } (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \text{ } et \text{ } (a_i) \in A^I \right\}$$
Exemple	Considérons $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \{\vec{\imath}; \vec{\jmath}\}$. $Vect(A) = \{\lambda\vec{\imath} + \mu\vec{\jmath} \ avec\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ Les deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ n'étant pas colinéaires nous avons $Vect(A) = \mathbb{R}^2$
Propriété	Soit A non vide une partie de E ev. $Vect(A)$ est un sev de A

Preuve

A non vide et $A \subset Vect(A)$ par construction. Donc $Vect(A)$ partie non vide de E
Soit $(x, y) \in (Vect(A))^2$.
x et y sont des combinaisons linéaires d'éléments de A. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu y$ est donc lui aussi une combinaison linéaire d'éléments de A. Donc si $(x, y) \in \left(Vect(A)\right)^2$, $\lambda x + \mu y \in Vect(A)$

Remarque	Désormais lorsque l'on voudra montrer qu'un sous ensemble est un sev, il sera peut être judicieux de montrer que ce sous ensemble est un ensemble de combinaisons linéaires d'un autre ensemble. Si c'est le cas alors la caractéristique sev sera acquise.
Exemple	Nous avons vu que l'équation différentielle homogène, linéaire, du second ordre $y'' + y' - y = 0$ avait pour équation caractéristique $r^2 + r - 1$ Cette equation caractéristique admet pour discriminant $\Delta = 5$ et comme solutions $r_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent donc $\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ Désormais nous pouvons même affirmer que si S désigne l'ensemble des solutions de cette équation différentielle $S = Vect(e^{r_1 x}; e^{r_2 x})$ et que par conséquent S est un espace vectoriel.
Définitions	Soit E un ev. • Soit $x \in E$ et $x \neq \vec{0}$. $Vect(x)$ est un sev de E appelé droite vectorielle. • Soit $(x, y) \in E^2$. $Vect(x, y)$ est un sev de E appelé plan vectoriel.
Propriété	Soit E un ev et A une partie non vide de E. Soit B un sev de E contenant A. Alors $Vect(A) \subset B$ Une autre manière d'énoncer cette propriété est $Vect(A)$ est le plus petit sev (au sens de l'inclusion) contenant A.

Preuve

$x \in Vect(A) \Rightarrow x$ est combinaison linéaire de vecteurs de A. Or tout vecteur de A est un vecteur de B donc x est une combinaison linéaire de vecteurs de B. Or B est un sev donc stable par combinaison linéaire. Donc $x \in B$